Г. М. Генералов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА

10–11 КЛАССЫ

Г. М. Генералов

ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

10–11 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2021

УДК 373.167.1:51+51(075.3) 12+
ББК 22.1я721
Г34

Серия «Профильная школа» основана в 2019 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Генералов, Геннадий Михайлович.

Г34 Математическое моделирование : 10—11-е классы : учебное пособие для общеобразовательных организаций : [издание в pdf-формате] / Г. М. Генералов. — Москва : Просвещение, 2021. — 159 с. : ил. — (Профильная школа).

ISBN 978-5-09-084745-2. — Текст : электронный.

Пособие представляет собой элективный курс, разработанный для организации дополнительного изучения и предназначенный для учащихся 10—11 классов школ и колледжей. Представлены теоретические материалы и задания, ориентированные на развитие элементарных практических навыков по формулированию экономико-математических моделей, их анализу и использованию для принятия управленческих решений.

Пособие может быть использовано при реализации учебного плана технологического, естественно-научного, социально-экономического, гуманитарного, универсального и других профилей как на уровне среднего общего образования, так и в рамках внеурочной деятельности.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-084745-2

Предисловие

Курс «Математическое моделирование» предназначен для учащихся 10—11 классов и колледжей, он поможет выпускникам в выборе современных профессий, требующих теоретических знаний и элементарных практических навыков по формулированию экономико-математических моделей, их анализу и использованию для принятия управленческих решений. Пособие может быть использовано при реализации учебного плана технологического, естественнонаучного, социально-экономического, гуманитарного, универсального и других профилей как на уровне среднего общего образования, так и в рамках внеурочной деятельности, а также при подготовке старшеклассников к участию в международных исследованиях качества математического образования PISA. Книга поможет учителю сэкономить время на подготовку материала к разделу образовательной программы «Методы математики» и даст ему возможность наиболее полно проявить свою профессиональную компетентность.

Содержание курса «Математическое моделирование» построено исходя из стремления привлечь внимание учащихся к практическим навыкам моделирования в социально-экономической сфере деятельности, без утяжеления процесса обучения специальными терминами теоретико-методологических основ моделей микроэкономики и экономики предприятия, без необходимости расширения школьного курса математики. Часто для сокращения времени восприятия новое понятие вводится здесь на интуитивном уровне, на примере. С одной стороны, изучение данного элективного курса повысит интерес учащихся к школьному курсу математики как необходимому фундаменту для формирования практических навыков, дающих перспективы в приобретении новейших современных профессий (совмещённые специальности «математик-аналитик», «математик-программист» и др.). С другой стороны, навыки, полученные при обучении математическому моделированию, повысят уровень подготовки учащихся к итоговым аттестациям.

В целом курс имеет прикладную направленность. Под этим понимается, что строгое изложение вопросов построения, применения и проверки адекватности математических методов и моделей в экономике и бизнесе детально рассматривается при изучении соответствующих дисциплин в высшем профессиональном образовании.

Курс рассчитан на 35 часов в год при одном часе в неделю и на 70 часов в год при двух часах в неделю. Содержание книги разделено на четыре главы. Материал каждой главы разбит на параграфы, каждый из которых состоит из завершённых блоков (теория +

пример + задачи для самостоятельного решения), что значительно облегчает учителю работу по отбору материала на занятие. Заданий достаточно для того, чтобы занять ими учащихся различного уровня подготовки и сферы интересов. В приложении 2 имеется поурочный план. Важными в этой книге являются межпредметные связи. Материал может параллельно изучаться и на уроках информатики, и на уроках экономики (в колледжах). В пособии разобраны три лабораторные работы в MS Excel.

Мы постарались удобно сконструировать учебный материал, используя следующие обозначения:

— задания для самостоятельного решения в конце параграфа

▶ — задания для самостоятельного решения на повторение ранее изученного материала

— творческие задания

— лабораторные работы

— ключевые слова, термины, которые были изучены в главе

— ключевые навыки, которым научились, изучив главу

— итоговые вопросы

— примерный список проектных заданий

Глава

1

ПРОФЕССИЯ МАТЕМАТИКА-АНАЛИТИКА: НАУКА И ИСКУССТВО

1.1 Математическое моделирование в современных профессиях и естествознании

Решение экономических, социальных, политических проблем, а также проблем естествознания требует предварительного анализа ситуации, без которого могут быть серьёзные последствия.

Представьте себе, что вы владелец или руководитель небольшого ресторана на 90 посадочных мест. При цене 320 р. за бизнес-ланч (комплексный обед) бывает 70 посетителей в день, а при цене 280 р. за бизнес-ланч число желающих пообедать в вашем ресторане возрастает до 80 посетителей в день.

Ежедневно на приготовление бизнес-ланча расходуется одно и то же количество электроэнергии, воды. Поварам, официантам и другим служащим ресторана выплачивается одна и та же зарплата. Это фиксированные издержки, и они составляют 900 р. в день. А вот продуктовые затраты зависят от количества проданных обедов и составляют 80 р. за один бизнес-ланч. Это переменные издержки. Допустим, зависимость между ценой обеда и числом посетителей выражается линейной функцией (хотя в жизни эта зависимость нелинейная). При какой цене бизнес-ланча вы можете получить ежедневную максимальную прибыль (чистый доход)? Если цена будет слишком мала, то за дверями вашего ресторана выстроится очередь. А если цену завысить, то вы потеряете своих клиентов. И то и другое решение приведёт к потере прибыли. Мы привели

пример из микроэкономики о ситуации на одном малом предприятии. В макроэкономике задачи многомерны и решаются средствами специальных компьютерных программ. Этими вопросами занимаются специалисты-математики. Работодателям сегодня нужны профессионалы, которые могут смоделировать проблемную ситуацию в сфере деятельности компании, найти пути её решения и тем самым минимизировать риски компании. Такие специалисты называются «математик-аналитик», «математик-программист». Автор книги предлагает уважаемым читателям познакомиться с такими современными и востребованными профессиями.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

В книге будут часты обращения к трудам широко известного математика-аналитика Никиты Николаевича Моисеева.

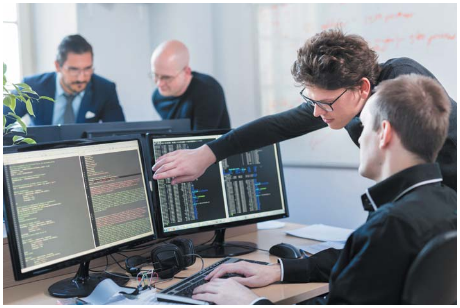
Н. Н. Моисеев (1917—2000) — советский и российский учёный в области прикладной математики, академик Академии наук СССР, основатель и руководитель целого ряда научных школ. Н. Н. Моисеев организовал факультет управления и прикладной математики в МФТИ и стал его первым деканом (1969). Одним из важных на мировом уровне проектов была проведённая под его руководством разработка математической модели экологических последствий ядерной войны, получившей широкую известность в мире под названием «ядерная зима».

В своей книге «Математика ставит эксперимент» [19, с. 6—7] Н. Н. Моисеев пишет о роли математики в профессии аналитика: «Во-первых, я убедился в могуществе математики, в её способности быть полезной в инженерной практике. Во-вторых, я понял, что инженерам не нужны примитивные математические приёмы — ими инженер владеет сам не хуже нас, математиков. Трудные технические задачи требуют настоящего математического творчества. И наконец, последнее — для того чтобы справиться с инженерной задачей, надо отчётливо понимать её содержание, т. е. самому сделаться инженером. Математику самому приходится искать то «жемчужное зерно», которое впоследствии он назовёт моделью. Непонимание этого принципа часто приводит к тому, что прекрасно подготовленный, способный юноша-математик, оказавшись в промышленности, так и не находит своего места.

В 2018 г. впервые была учреждена премия Российской академии наук имени Н. Н. Моисеева.

Математики-аналитики, математики-программисты уже работают во многих производственных и IT-компаниях. Это компании, которые занимаются:

— разработкой программного обеспечения, интернет-сервисов, обработкой звука и видео, 3D-моделированием;



— производством оборудования (медицинского, телекоммуникационного, электротехнического и др.);

— созданием роботов;

— разработкой радиолокационной, навигационной аппаратуры для оборонной промышленности (ВКС) и космических исследований;

— оказанием услуг (банки, крупные торговые сети, хостинг-центры и др.).

Не секрет, что популярной на сегодняшний день является специальность программиста. Но математические модели объектов и процессов для программирования создаёт математик. И, как правило, компаниям дорого содержать двух таких специалистов — математика и программиста. Поэтому «математик-аналитик» и «математик-программист» — это профессии с большим будущим. Чем занимается такой специалист? Какие знания ему нужны? Как он применяет их к реалиям жизни? Каков продукт его деятельности?

На многих сайтах по поиску специалистов и работодателей есть разъяснения этих вопросов. Вот некоторые из них:

Математик-программист занимается программированием различных процессов, смоделированных им заранее. В его обязанности входит:

— разработка алгоритмов, оценка их сложности и оптимизация производительности;

— построение математических моделей объектов и процессов.

От специалиста требуется:

— знание численных методов и умение писать программы с их использованием;

— знание математического анализа, аналитической и дифференциальной геометрии, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, теории графов;

— знание методов построения финансовых моделей и многое другое.

Таким образом, математик-программист в зависимости от области деятельности может, например, решать пространственно-координатные задачи для средств навигации или разрабатывать математические модели процессов ректификации в нефтепереработке.

Математик-аналитик работает с массивами информации и занимается построением математических моделей, обработкой данных, автоматизирует работу с ними, оптимизирует процессы.

Вот примерный круг задач, которые решает математик-аналитик:

— создание математических моделей для анализа данных мировых фондовых рынков и их прогнозирования;

— анализ грузопотоков и разработка математической модели наиболее эффективных транспортных потоков (транспортная задача);

— оптимизация распределения товаров по складам (учёт прогнозов, сезонности и потребностей филиалов);

— создание математических и экономических моделей для анализа, расчёта и прогнозирования показателей рынка;

— разработка политики и правил выдачи кредитов с целью уменьшения рисков банка.

Чтобы быть таким профессионалом и делать открытия, нужные и полезные каждый день, специалист должен знать:

— численные методы, теорию вероятностей и математическую статистику;

— теорию графов и методы решения транспортных задач;

— анализ временны́х рядов, построение математических моделей;

— методы математической обработки больших и сложных массивов данных;

— основы программирования показателей по данным с шумами и помехами или недостаточным данным;

— многое другое (английский язык, статистические пакеты, нейронные сети и др.).

Обучение математическому моделированию в школе начинается с решения задач на составление уравнений, неравенств и их систем, изучения свойств различных элементарных функций и построения их графиков, изучения теории вероятностей и математической статистики. Эти навыки помогут вам в построении математических моделей, изучаемых в данном пособии, и их анализе. Решая задачи по математическому моделированию, вы можете обнаружить в себе предрасположенность к тем редким специальностям, о которых мы говорили выше, но имеющим огромный спрос на рынке профессий уже сегодня!

Как научиться моделированию? Приведём слова Н. Н. Моисеева из его книги «Математика ставит эксперимент» [19, с. 137]: «Традиционный путь — это сначала разобраться в новой дисциплине, затратить определённое время на её изучение, а затем уже начинать

делать что-нибудь новое. Но есть и другая схема действий. Первый её шаг — это ввязаться в какое-нибудь новое, трудное дело. Попробовать сначала решать задачу, отправляясь от того «уровня невежества», на котором мы находимся. Этот путь более тяжёлый. Он будет заведомо связан с неудачами. Но зато он прямее ведёт к специализации, к более глубокому пониманию предмета. В этом случае браться за изучение следует только после того, как удалось выявить основные трудности, только после того, как первая попытка решать задачу оказалась неудачной».

Пример 1. Вернёмся к задаче про ресторан! Доход ресторана от бизнес-ланча равен произведению количества проданных обедов и их цены.

$D(p, x) = p \cdot x$, где p — цена, x — количество.

Прибыль можно рассчитать как разность между доходом и суммированными расходами (издержками). Издержки складываются из постоянных и переменных величин. Обозначим издержки $C(x)$ и запишем для них выражение:

$$C(x) = 900 + 80x.$$

Зависимость цены от количества (её называют функцией спроса) линейна и имеет вид $P(x) = -kx + l$. Составим систему линейных уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} 70k + l = 320 \\ 80k + l = 280 \end{cases}$$

Решив данную систему, найдём коэффициенты функции спроса: $k = -4$, $l = 600$. Значит, функция спроса имеет вид:

$$P(x) = -4x + 600.$$

Теперь функция прибыли будет иметь вид:

$$F(x) = (-4x + 600)x - (900 + 80x).$$

Графиком данной функции является парабола, направленная ветвями вниз. Её максимум находится в вершине параболы.

$x_{\max} = -\dfrac{b}{2a} = 65$ — оптимальное число гостей ресторана.

Найдём оптимальную цену обеда:

$$P(65) = -4 \times 65 + 600 = 340 \text{ (р.)}.$$

Теперь подсчитаем максимальную прибыль только от проведения акции «бизнес-ланч» при таком количестве гостей в день:

$$F(x) = (-4 \times 65 + 600) \times 65 - (900 + 80 \times 65) = 16\,000.$$

В месяц (21 рабочий день):

$16\,000 \times 21 = 336\,000$ (р.) — чистая прибыль только от продажи бизнес-ланча!

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ▶ В супермаркет поступил товар: 400 кг сыра и 600 кг колбасы на общую сумму 660 000 р. и 300 кг сыра и 400 кг колбасы на общую сумму 450 000 р. Определите цены на каждый товар. Сыры и колбасы одного вида.

Ответ: 1 кг сыра стоит 300 р.; 1 кг колбасы стоит 900 р.

2. ▶ Если производственная линия станет ежедневно делать на 60 компьютеров больше, чем планировалось, то заказ будет выполнен на 10 дней раньше срока.

Если производственная линия будет изготавливать ежедневно на 40 компьютеров меньше, чем планировалось, то выполнение заказа задержится на 10 дней. За сколько дней производственная линия выполнит заказ?

Ответ: за 50 дней производственная линия изготовит 12 000 компьютеров.

3. ▶ Решите системы уравнений с тремя неизвестными:

а) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$

Ответ: а) (1; 2; 3); б) $\varnothing$; в) бесконечное множество решений.

▶ Постройте на плоскости xOy области, заданные системами неравенств и уравнений.

4. а) $x + y - 1 \geqslant 0$ б) $\begin{cases} x + y + 1 > 1 \\ 2x + 4y + 6 \leqslant 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y \geqslant 1 \\ x - y \leqslant 0 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 6 \\ x - y \geqslant -1 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 5 \leqslant 0 \\ x - y - 1 \geqslant 1 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y \geqslant 1 \\ 2x + 2y \leqslant 5 \\ x \geqslant 1,\ y \leqslant 2 \end{cases}$

6. Издержки перевозок двумя видами транспорта (поездом и самолётом) выражаются формулами: $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где

y — транспортные расходы в условных денежных единицах (у. е.); x — расстояние перевозки в 10^5 м.

Рассчитайте расстояние, начиная с которого более экономичной становится перевозка самолётом.

Указание:

Шаг 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 150 + 50x & (1) \\ y = 250 + 25x & (2) \end{cases}$$

$x = 4$; $y = 350$.

Шаг 2. Сделайте схематический чертёж уравнений прямых (1) и (2).

Шаг 3. Из чертежа видно, что при расстояниях, превышающих 400 км, перевозки самолётом дешевле.

7. ▶ На прямой, параллельной оси ординат, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 3. Чему равна абсцисса другой точки?

8. ▶ Определите координаты середины отрезка MN, если координаты точек M (1; 2) и N (3; 6).

9. ▶ Определите расстояние MN (из условия задания 8).

10. ▶ Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: M и N, M и O, N и O (из условия задания 8), где точка O — начало координат.

11. ▶ На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки A и B. Абсцисса точки A равна 4. Постройте точку B.

12. ▶ Составьте уравнения прямых, проходящих через точки:

а) A (4; 0) и B (0; 3); б) M (1; 4) и N (−2; 4);

в) P (4; −1) и Q (−6; 2).

13. ▶ Докажите, что прямые $2x + 2y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ пересекаются под прямым углом.

14. ▶ Как расположены прямые $x + 2y = 3$ и $2x + 4y = 3$ относительно друг друга?

15. ▶ Установите, как расположены прямые относительно координатных осей.

а) $3x + 15 = 0$; б) $3y - 3 = 0$; в) $2x - 3y = 0$.

16. ▶ Определите координаты точек пересечения с осями координат следующих прямых:

а) $x - 2y + 4 = 0$; б) $2x - 4 = 0$; в) $3y + 9 = 0$;
г) $3x - 2y = 0$; д) $5x = 0$; е) $4y = 0$.

1.2 Определение математической модели. Классификация математических моделей

Этапы экономико-математического моделирования

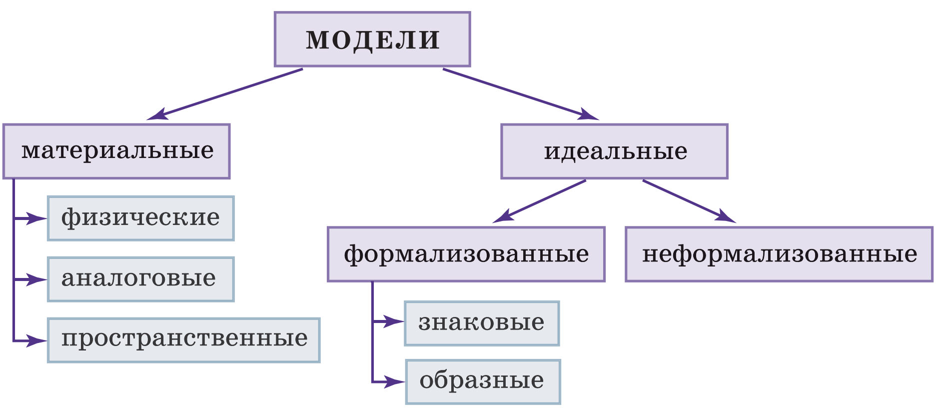
Моделирование — это мощное средство научного познания и решения практических задач. Базовым понятием при формировании целей моделирования является модель. В самом общем смысле модель — условный образ объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования.

Мы часто в своей жизни употребляем термин «модель», понимая под ним разного рода объекты.

> *Модель* — это образ реального процесса, отражающий существенные свойства этого процесса и замещающий его в ходе исследования. Построение модели называется *моделированием*.

Модели могут формулироваться на русском, английском, французском и других языках. Для описания модели могут использоваться графические построения, язык биологии, химии, истории и т. д. Для описания математических моделей используют язык математики. Как пишет Н. Н. Моисеев в своей книге [19, с. 29], при использовании математических методов для анализа какого-либо процесса «необходимо некоторое математическое описание этого процесса, т. е. его описание на языке математики. Его-то мы и называем математической моделью».

Существует множество различных классификаций моделей. Одним из примеров такой классификации может служить следующая:



Математические модели являются важнейшим видом знаковых моделей, так как знаковое моделирование включает в себя графический, табличный, аналитический виды, пакеты программ и пр. Математические модели могут создаваться из любых математических объектов: чисел, функций, уравнений, графиков, множеств, графов и т. д. В этой книге мы познакомимся с некоторыми знаковыми моделями.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Н. Н. Моисеев описал три пути возникновения математических моделей в естествознании.

Первый путь — это возникновение математической модели в результате прямого наблюдения явления, его изучения и осмысления. Модели, полученные таким путём, называют феноменологическими. Все законы Ньютона есть пример феноменологических моделей.

Второй путь — это появление математической модели в результате дедуктивных рассуждений, когда новая модель получается как частный случай более общей модели. Такие модели называют асимптотическими. Так, например, механика Ньютона получается из релятивистской механики предельным переходом при условии, что отношение скорости объекта к скорости света стремится к нулю.

Третий путь — это появление модели как некоего обобщения «элементарных моделей». Такие модели называют моделями ансамблей. Примером таких моделей являются модели планетарных систем или «гиббсовские ансамбли».

Описанные процессы в естествознании можно считать эволюционными, когда «переход к новой, более глубокой теории не отвергает старую, а включает её в себя как некоторую асимптотику» [19, с. 35].

Но в науке случаются и революции. Революционной моделью можно считать модель Н. Коперника.

Вернёмся к вопросу о моделировании. С одной стороны, модели должны быть доступны для изучения, а с другой — они должны отражать характерные, существенные черты объектов исследования.

В силу этого составление моделей во многом является искусством. Этим же и объясняется востребованность математиков-аналитиков на рынке труда в любые времена. Очень важным является вопрос о возможности применения данной модели, её адекватности. Этот вопрос решается путём сравнения модели с её оригиналом, сравнения предсказаний, полученных в процессе моделирования, с реальной жизнью. Любая модель — это переход от опыта к абстракции, к осмыслению моделируемых процессов и от него снова к практике, к применению полученных знаний. Ошибается тот, кто думает, что каждая модель может быть проверена на опыте. На самом деле всё гораздо труднее. Иногда на помощь приходит мысленный эксперимент. Нигде на Земле невозможно проверить законы Ньютона. Но они служат человечеству уже пятое столетие! В этом и состоит вопрос практики.

В экономической теории известны модели, с помощью которых изучаются определённые социально-экономические процессы. Эти модели носят имена исследователей, открывших их (Кейнса, Кобба—Дугласа, Неймана, Леонтьева, Канторовича и др.).

Для математического моделирования социально-экономических процессов применяют не одну модель, а систему моделей, описывающих их с разных сторон.

Как строится экономико-математическая модель?

1) формируются предмет и цели исследования. Например:

предмет — потребительский выбор, перевозка груза, рождаемость населения, товарооборот розничной и оптовой торговли и т. д.;

цели — прогноз, оптимизация управления и т. д.;

2) в рассматриваемом социально-экономическом процессе выделяются структурные и функциональные элементы, соответствующие данной цели, выявляются наиболее важные качественные характеристики этих элементов;

3) словесно описывается взаимосвязь между элементами модели;

4) вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик предмета исследования;

5) проводятся расчёты математической модели и анализ полученного решения.

Важным требованием, предъявленным к модели, должна быть её адекватность, т. е. максимальное приближение к реальной ситуации. Создать достаточно адекватную реальности модель очень сложно. Надо уметь строить модели по возможности просто, описывая те или иные процессы на языке математики и ограничивая себя минимальным необходимым количеством параметров. Многое зависит от того, какого класса модель была выбрана для принятия решений.

Единой системы классификации экономико-математических моделей в настоящее время не существует.

Так, в книге В. В. Федосеева [35] предлагается выделять экономико-математические модели по следующим признакам:

1) по учёту фактора неопределённости (детерминированные и стохастические);

2) по учёту фактора времени (статические и динамические);

3) по степени агрегирования объектов (макроэкономические и микроэкономические);

4) по предназначению, т. е. по цели создания и применения (балансовые, оптимизационные, трендовые и имитационные);

5) по типу получения информации, используемой в модели (аналитические и идентифицируемые);

6) по возможности применения (теоретические и прикладные).

В рамках этого курса читатель сможет лишь приоткрыть тайну искусства экономико-математического моделирования, рассмотрев некоторые из перечисленных моделей.

Процесс моделирования не заканчивается составлением моделей, а только начинается. Составив модель, выбирают метод нахождения ответа.

Экономико-математические методы представляют собой комплекс экономико-математических дисциплин, являющийся сплавом экономики, математики и кибернетики. Эти дисциплины изучают будущие специалисты, выбирая профессию математика-аналитика, математика-программиста и др.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1. Джон Мейнард Кейнс (1883—1946) — английский экономист, основоположник современной макроэкономики, основатель целого направления в экономической теории. Экономическое течение, возникшее под влиянием идей Кейнса, в дальнейшем получило название «кейнсианство».

Кейнсианство — система экономических знаний об агрегированном показателе спроса и о том, как он влияет на производство. Особое значение имеет научный труд Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег». Основной недостаток его теории — невозможность её использования в долгосрочном масштабе. Она отвечает требованиям своего времени, но не подходит под другие экономические модели. Кейнс не уделял много внимания стратегии экономического роста или динамики, он решал проблему занятости. Кейнс является автором оригинальной теории вероятностей, основанной на предположении, что вероятность является логическим, а не числовым отношением.

2. В 1928 г. Чарльз Уиггинс Кобб и Пол Ховард Дуглас опубликовали статью «Теория производства». В ней они изложили модель производственной функции, которая с тех пор «не ржавеет» в арсенале экономистов-аналитиков. Суть её в том, что в ней комбинируются два фактора: капитал (K) и труд (L). Если количество используемого капитала увеличить на 1% при неизменном количестве труда, то объём продукции (Y)

увеличится на 1%. Экономисты полюбили функцию Кобба—Дугласа потому, что она даёт возможность иногда заглянуть в ближайшее будущее. Такое занятие называется прогнозированием. В следующих главах о нём будет рассказано подробнее. Но сейчас можно коротко сказать о том, как это делается. Сначала собирается статистика показателей K, L и Y за ряд прошедших лет (чем длиннее этот ряд, тем достовернее будет прогноз). На основе собранных данных вычисляются постоянные коэффициенты производственной функции, и затем уже можно наблюдать, что будет дальше с Y, если K и L будут изменяться. Функция Кобба—Дугласа может применяться на различных уровнях — отдельного предприятия, отрасли производства, народного хозяйства в целом.

Теперь представьте себе, что вы владелец производственной или торговой компании или вам предстоит стать её руководителем.

Пример 2. Ваша компания выпускает изделия двух видов: компьютеры (1) и планшеты (2). Известно, что за каждое изготовленное изделие первого и второго видов предприятие получает прибыль 300 у. е. и 200 у. е. Вы хотите увеличить прибыль. Математик-аналитик, работающий на вашем предприятии, рассуждает так:

Шаг 1. Обозначим через x_1 и x_2 число изделий первого и второго видов (компьютер и планшет).

Шаг 2. Обозначим через f прибыль предприятия, полученную за счёт производства x_1 и x_2. Тогда функция прибыли запишется в виде

$$f\ (x_1;\ x_2) = 300 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2.$$

Шаг 3. Задача для математика-аналитика состоит в том, чтобы найти числа x_1 и x_2, для которых функция $f\ (x_1;\ x_2) = 300x_1 + 200x_2$ будет иметь наибольшее значение. Сейчас эта задача невыполнима из-за широты области отыскания неизвестных величин. Требуется выбрать и сформулировать на математическом языке ограничения, позволяющие сузить проблему и найти её решение.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вы открыли магазин тканей. В ваш магазин поступил товар: 240 м сукна и 280 м драпа на общую сумму 16 520 р. и 180 м того же сукна и 22 м того же драпа на общую сумму 12 740 р. Определите цены этих товаров.

2. Вы руководитель производственного отдела в группе компаний. Два ваших предприятия выпускают за квартал a станков. Первое выпустило 112%, а второе — 110% от запланированного. Поэтому оба предприятия сделали за квартал $(a + b)$ станков. Определите, сколько станков выпустили первое и второе предприятия.

Ответ: $(10a - 5b)$ и $(6b - 50a)$.

3. Вы фермер. Если ширину и длину вашего прямоугольного участка увеличить на 1 м, то его площадь увеличится на 40 м^2. Если ширину уменьшить на 1 м, а длину увеличить на 2 м, то площадь увеличится на 4 м^2. Рассчитайте ширину и длину вашего участка.

Ответ: 15 и 24 м.

4. Вы открыли две торговые точки по продаже мороженого. Известно, что прибыль от продажи мороженого в двух точках приблизительно можно записать двумя выражениями:
$y_1 = 3x_1 - 2$ и $y_2 = 3{,}5x_2 - 3$, где x_1, x_2 — количество мороженого, y_1, y_2 — функции спроса в каждой точке продажи соответственно.
Выясните, какая из двух торговых точек более выгодна для реализации товара.
Указание:
Определите, начиная с какого количества товара x более выгодной становится продажа мороженого на второй точке.

5. При каком значении параметра α или β системы будут иметь: а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) не иметь решения?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \beta \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

6. ▶ Начертите в плоскости x_1Ox_2 область, заданную системой неравенств:

1) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 15 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 9 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 5 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leqslant 15 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 15 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant -1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ x_1 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

7. ▶ Задана система неравенств:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_1 < 5 \\ x_2 + 2x_1 < 11 \\ 4x_2 + x_1 > 9 \end{cases}$$

Сделайте чертёж и укажите:

а) на плоскости x_1Ox_2 несколько точек, координаты которых — натуральные числа;

б) на плоскости x_1Ox_2 несколько точек, координаты которых — целые числа;

в) на плоскости x_1Ox_2 несколько точек, координаты которых — целые отрицательные числа.

8. ▶ На плоскости xOy расположен треугольник, который образован пересечением следующих пар прямых:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

При каком значении t точка M с координатами $(t;\ t^2)$ расположена внутри треугольника? Сделайте чертёж.

Ответ: множество значений параметра t пустое.

9. Постройте множество точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $\begin{cases} x > 2 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ б) $x < y < x + 1$ в) $\begin{cases} x + y \geqslant 3 \\ x - y \geqslant 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y - 3 \leqslant 0 \\ x - y - 1 \geqslant 1 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y - 3 \geqslant 3 \\ x - y - 1 \leqslant 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y \leqslant 4 \\ x - y \geqslant 1 \end{cases}$

ж) $x \leqslant y \leqslant 1$ з) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y \geqslant -1 \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - 2 \leqslant 0 \\ x - y \leqslant 0 \\ x + y \leqslant 0 \end{cases}$

к) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$ л) $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \geqslant 2 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ м) $\begin{cases} x + y + 1 \geqslant 0 \\ x + y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$

10. Начертите полуплоскости, которые задаются неравенствами:

а) $3x + 5y - 4 \geqslant 0$ б) $3x + 5y - 4 \leqslant 0$

в) $3x + 5y - 4 > 0$ г) $3x + 5y - 4 < 0$

Укажите нормальный вектор к каждой полуплоскости.

ЧТО УЗНАЛИ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 1

Модель 12

Экономико-математическая модель 14

ЧЕМУ НАУЧИЛИСЬ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 1

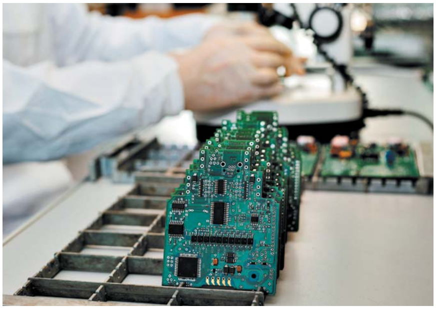
- Выделять из множества общих моделей экономико-математические модели.

Глава

2

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: ИСКУССТВО ПЛАНИРОВАНИЯ БИЗНЕСА

2.1 Математическая постановка задачи линейного программирования



Вернёмся к вашей воображаемой компании по производству планшетов и компьютеров (с. 16, пример 2). В экономике, кроме необходимости подсчёта соотношений затрат, выпуска, спроса, предложения и др., часто возникает необходимость выбора одного из возможных вариантов функционирования экономической системы. Тогда ставится вопрос о выборе наилучшего варианта. В таких случаях применяют оптимизационные модели. В экономических задачах область изменения переменных величин ограничена и наилучшее значение целевой функции требуется найти на ограниченном множестве.

Область исследования подобных задач называется математическим программированием. Традиционно в математическом программировании выделяют следующие основные разделы:

линейное программирование(ЛП) — целевая функция линейна (все переменные величины стоят в первой степени); множество, на котором ищется максимальное или минимальное значение целевой функции, задаётся системой линейных уравнений или неравенств. В ЛП для удобства его использования также выделяют особые классы задач. Эти задачи демонстрируют методы решения, выгодно отличающиеся от методов решения задач общего характера (например, транспортная задача, задача о диете, производственный план и др.);

нелинейное программирование — нелинейная целевая функция и/или ограничения;

целочисленное программирование — переменные должны отвечать условию целочисленности.

Среди задач оптимизации первоначально была подробно исследована задача ЛП. Запишем её в общем виде:

1. Задача решается относительно n переменных: x_1, x_2, ..., x_n. Обычно их записывают в виде столбца или строки:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

2. Предполагается, что набор x_1, x_2, ..., x_n должен удовлетворять системе m линейных неравенств. Её называют системой ограничений. Индексы при коэффициентах показывают их местоположение:

1-й указывает на номер неравенства (строки);

2-й указывает на порядковое место в неравенстве.

a_{11} означает, что коэффициент стоит в первом неравенстве на первом месте, a_{12} — в первом неравенстве на втором месте и т. д.

Итак, система ограничений выглядит как система следующих неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

Обратим внимание, что в системе m неравенств и n переменных.

3. В экономических задачах добавляется ещё одно условие: значения переменных x_1, x_2, ..., x_n должны быть неотрицательны.

4. Целевая функция представляет собой линейную функцию переменных x_1, x_2, ..., x_n.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

5. Общая задача ЛП состоит в выборе набора значений переменных, удовлетворяющего системе ограничительных неравенств и оптимизирующего значение целевой функции (максимальная прибыль, минимальные издержки).

Математически задача ЛП на максимум записывается и читается так:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при условии

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Стандартная задача ЛП на минимум записывается и читается так:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Множество всех наборов x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющих условию ограничений, называют множеством допустимых решений (или просто допустимым множеством X). Любой набор $x_1...x_n$ из этого множества X — допустимый план. Набор $x_1...x_n$ называют оптимальным решением или оптимальным планом задачи ЛП, если при нём целевая функция принимает наилучшее значение (максимальное — max или минимальное — min в зависимости от условия задачи).

Рассмотрим характерные типы задач ЛП и познакомимся с методами их решения. Количество переменных и количество уравнений или неравенств в системах ограничений умышленно сокращено до 3—5 элементов. Это сделано для облегчения понимания, хотя в реальной действительности их количество доходит до сотен и более.

Для решения таких задач с большим числом переменных применяются специальные методы.

Рассмотрим общие положения для формулирования задачи ЛП:

— ограничения в задачах ЛП могут выражаться как равенствами, так и неравенствами;

— целевая функция линейна и может достигать максимального или минимального значения;

— переменные в задачах всегда неотрицательны.

В реальной жизни задачи оптимизации возникают, когда необходимо реализовать принцип оптимальности в планировании и управлении. Принцип заключается в том, что для успешного экономического развития необходимо найти такое планово-управленческое решение, которое наилучшим образом использовало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйственного субъекта.

Для удобства решения задачи ЛП можно сформулировать следующие этапы работы с ней:

— понять проблему, составить описательную модель задачи;

— идентифицировать переменные задачи;

— выбрать некоторую количественную меру эффективности для целевой функции;

— представить эту меру эффективности как линейную функцию относительно переменных задачи;

— собрать количественные данные.

Также сформулируем некоторые условия применимости задачи ЛП:

— определённость (детерминированность) — предполагается, что все параметры модели известны точно или могут быть оценены;

— линейность — предполагается, что все соотношения модели линейны относительно переменных.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

О задачах линейного программирования Н. Н. Моисеев писал [19, с. 134]: «...иногда ничтожными затратами на решение сравнительно простой задачи достигается экономический эффект, определяемый астрономическими цифрами. Значит, бывают ситуации, когда вместо того, чтобы вкладывать капиталы и труд многих тысяч людей, достаточно привлечь десяток математиков. Эффект тот же, а затраты в тысячи раз меньше. Что же это за задачи? Может быть, какие-то исключительные? Да нет, в том-то и дело, что они встречаются на каждом шагу. К ним относятся, например, большие распределительные задачи, в том числе и транспортные».

2.2 Методы решения задач линейного программирования

Графический метод

Задачу ЛП можно решить графическим методом, если переменных в ней две или три. Этот метод основан на геометрическом построении множества допустимых решений в задаче ЛП и нахождении среди них оптимального решения.

Рассмотрим пример.

Пример 1. Решите задачу ЛП с двумя переменными x и y.

$$f(x, y) = 2x + y \to \max$$

$$\begin{cases} x + y \leqslant 12 \\ 2x - y \leqslant 12 \\ 2x - y \geqslant 0 \\ 2x + y \geqslant 4 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

а) Решим систему линейных неравенств для того, чтобы найти множество допустимых решений в задаче ЛП.

Введём прямоугольную систему координат Oxy.

Построим прямую EP: $x + y = 12$

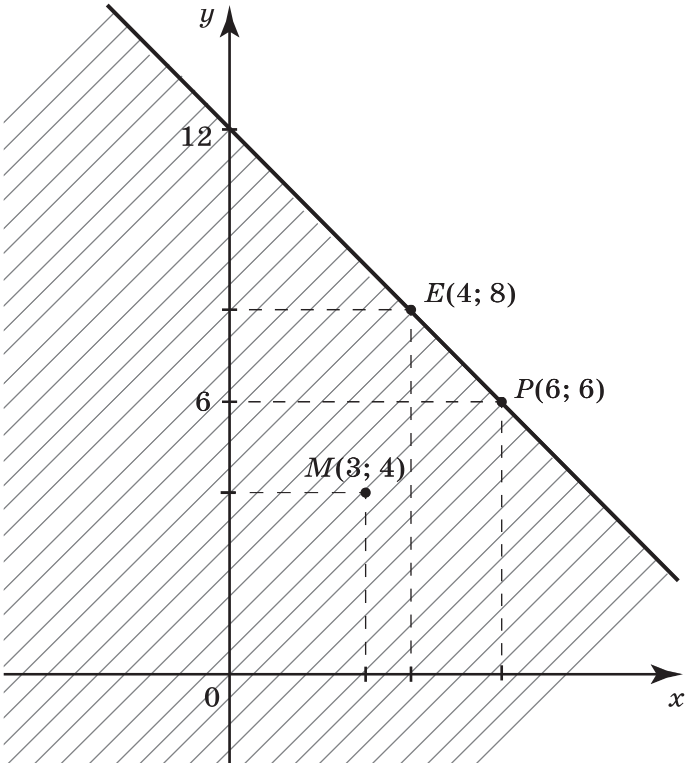


Рис. 1

Для этого зададим одной из переменных два различных значения (например, для x) и, подставив их в уравнение прямой, рассчитаем для них соответствующие значения другой переменной (в нашем случае y).

x	4	6
y	8	6

Отметим на координатной плоскости xOy полученные точки (4; 8) и (6; 6). Проведём через них прямую.

Прямая AB разобьёт координатную плоскость на две полуплоскости, одна из которых задаётся неравенством $x + y \leqslant 12$.

б) Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является множеством решений, достаточно подставить в неравенство координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой AB.

Если оно обращается в верное, то множеством решения является полуплоскость, содержащая данную точку. Если неравенство обращается при подстановке в неверное, то множеством решения является полуплоскость, не содержащая точку. Выберем точку M (3; 4) и подставим в неравенство $x + y \leqslant 12$. Получим $3 + 4 \leqslant 12$. Неравенство верно. Значит, и заштриховать надо полуплоскость, содержащую точку M (рис. 1).

в) Такую же работу надо проделать со всеми остальными неравенствами из системы ограничений. Для построения прямых удобно выбирать точки пересечения с координатными осями.

Строим прямую PQ: $2x - y = 12$.

x	8	6
y	4	0

Строим прямую ED: $2x - y = 0$.

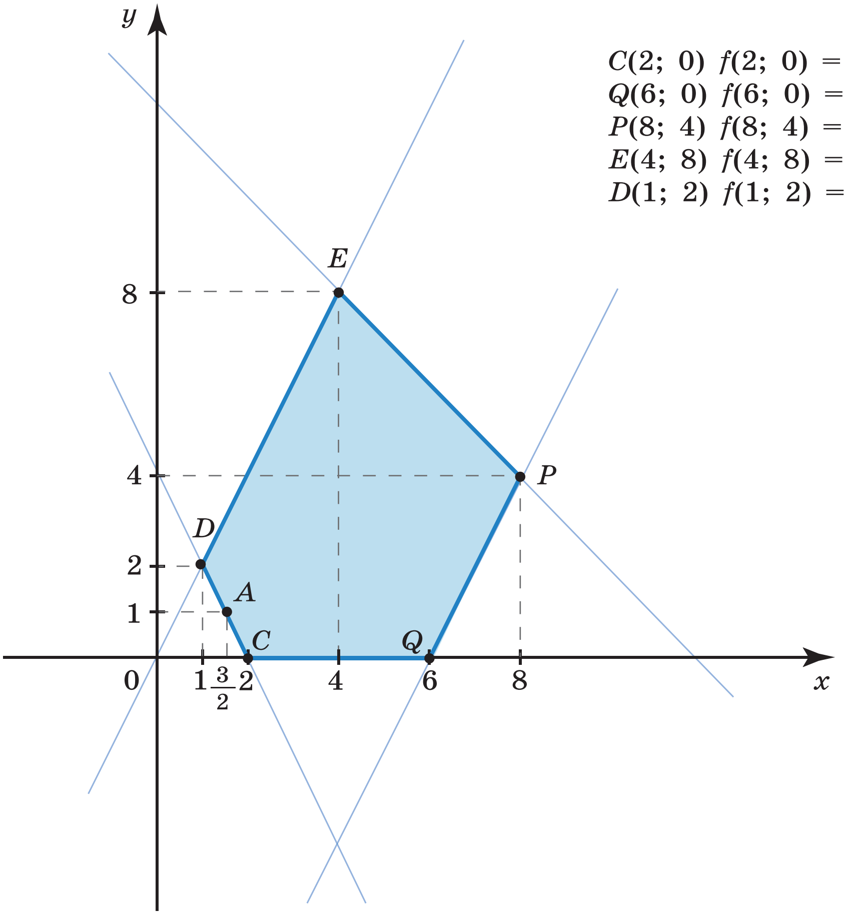
x	0	2
y	0	4

Строим прямую DC: $2x + y = 4$.

x	2	1
y	0	2

г) Заштриховываем области, заданные неравенствами, как указано в пункте б). В результате должна получиться область, где все заштрихованные области накладываются друг на друга. Эта область может быть в виде выпуклого или невыпуклого многоугольника, а также в виде незамкнутой области. А может случиться, что такой области и вовсе не окажется. В таком случае задача решений иметь не будет.

Получен пятиугольник *DEPQC*, представляющий множество допустимых решений (рис. 2). Оптимальное решение находится в вершинах многоугольника. Выпишем координаты вершин и найдём значения целевой функции в них.



$C(2;\ 0)\ f(2;\ 0) = 4$
$Q(6;\ 0)\ f(6;\ 0) = 12$
$P(8;\ 4)\ f(8;\ 4) = 20$
$E(4;\ 8)\ f(4;\ 8) = 16$
$D(1;\ 2)\ f(1;\ 2) = 4$

Рис. 2

д) Выбираем максимальное значение целевой функции. В нашей задаче максимальное значение одно, и оно расположено в точке P, т. е. $x = 8$ и $y = 4$ дают наибольшее значение целевой функции. Записывается это так: $f_{max}(8;\ 4) = 20$.

А вот минимальных значений два — в точках C и D. Это означает, что все они находятся на стороне CD пятиугольника и их бесконечное множество. Координаты любой точки из этого отрезка при подстановке в целевую функцию придают ей минимальное значение. К примеру, возьмём точку $A\left(\frac{3}{2};\ 1\right)$ и подставим её координаты в целевую функцию

$$f(A) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

Так как точка A была отобрана случайно, то любая точка отрезка CD даёт те же значения для целевой функции.

Если координаты точек пересечения прямых можно достаточно точно определить по рисунку, то их надо просто подставить поочерёдно в целевую функцию и выбрать те вершины, координаты которых дают наилучшее её значение.

е) Если же координаты вершин многоугольника трудно точно определить по рисунку или вершин много, то лучше снова взять линейку и карандаш. Графиком целевой функции является прямая. Её называют *линией уровня* и используют для нахождения оптимального решения среди допустимых. В нашем случае линия уровня $l = 2x + y$, где l — постоянная величина. Для удобства $l = \text{const} = 0$. У этой прямой есть так называемый нормальный вектор. Его координаты (2; 1) — коэффициенты в уравнении $l = 2x + y$. Это означает, что его начало лежит в начале координат, а конец — в точке (2; 1). Обозначим его $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен линии уровня.

Возьмём чертёжный угольник, линейку и расположим их так, как показано на рисунке 3. Будем перемещать линию уровня в направлении вектора-нормали $\vec{n}$, сохраняя перпендикулярность к нему. Так делают, когда надо найти max. А если требуется найти min, то линию уровня двигают в направлении, противоположном направлению $\vec{n}$. Возможно, что линия уровня совпадёт с одной из сторон многоугольника. Тогда координаты каждой точки этой стороны будут оптимальным решением.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с множеством допустимых решений и по отношению к которой это множество находится в одной из полуплоскостей. Множество допустимых решений любой задачи имеет не более двух опорных прямых. На одной из них находится оптимальное решение.

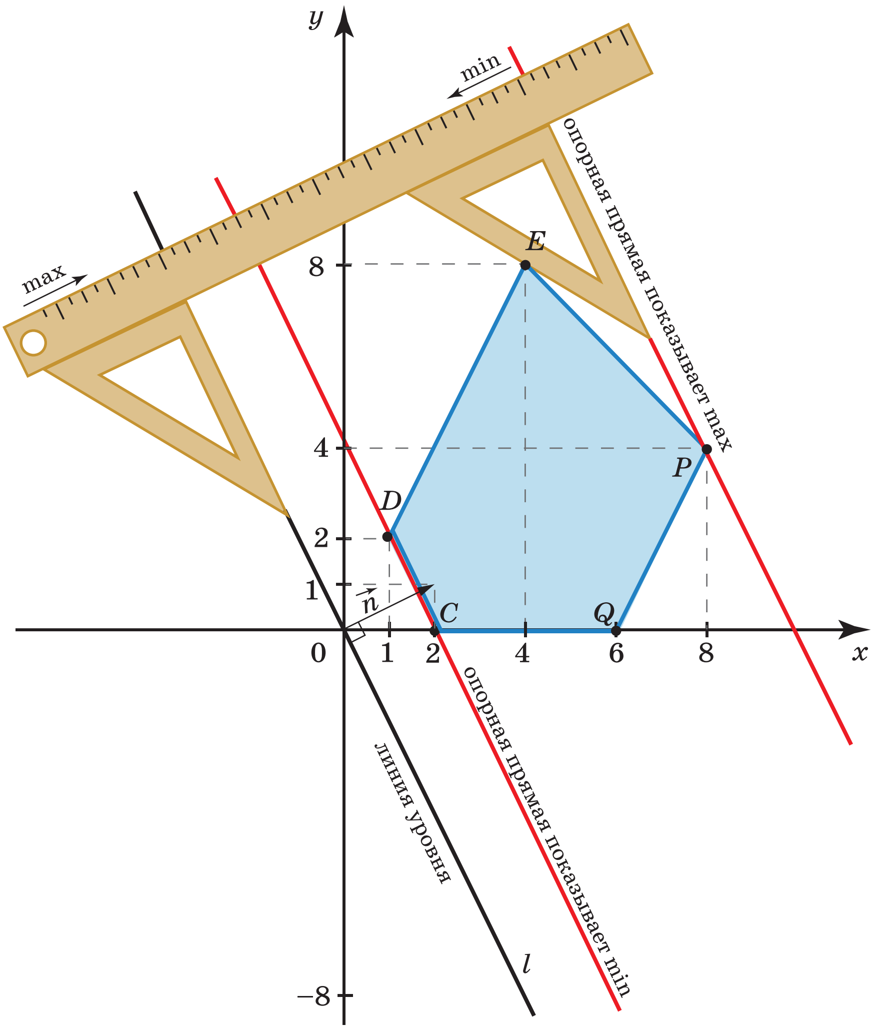


Рис. 3

Как видно из рисунка 3, этот метод даёт нам те же значения максимума целевой функции $f_{max}(8;\ 4) = 20$, что и при первом методе перебора.

Пример 2. Фирма производит три вида товара, но реализовать может не более 200 единиц товара 1-го вида, 500 единиц товара 2-го вида и 500 единиц товара 3-го вида.

На одно изделие товара 1-го вида расходуется 8 кг сырья, на одно изделие товара 2-го вида — 10 кг сырья, а на одно изделие товара 3-го вида — 12 кг сырья. Цена одного изделия товара 1-го вида 70 р., 2-го и 3-го вида соответственно 100 и 150 р. Составить математическую модель расчёта оптимального плана выпуска товара, обеспечивающего максимальную выручку, если известно, что ежемесячные затраты сырья не должны превышать 90 т.

Решение:

а) Введём необходимые обозначения неизвестных величин.

Пусть x — это количество единиц выпущенного товара 1-го вида, y — количество единиц выпущенного товара 2-го вида, а z — количество единиц выпущенного товара 3-го вида.

б) Составим систему ограничений задачи.

Расходы сырья на изготовление товара 1-го вида составят $8x$ кг. На изготовление товара 2-го вида — $10y$ кг, а на товар 3-го вида потратят $12z$ кг сырья. Тогда ограничения по ежемесячному расходу сырья можно записать в виде неравенства

$$8x + 10y + 12z \leqslant 90\ 000.$$

А общий выпуск на каждый вид товара запишется неравенствами $x \leqslant 200$, $y \leqslant 500$, $z \leqslant 500$. Учитывая, что все неизвестные величины положительны, запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} 8x + 10y + 12z \leqslant 90\,000 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ x \leqslant 200,\ y \leqslant 500,\ z \leqslant 500. \end{cases}$$

в) Стоимости (цены x количества) выпущенного товара 1, 2 и 3-го видов соответственно равны $70x$, $100y$, $150z$.

Целевая функция в задаче выражает выручку от продажи выпущенной продукции. Запишем полученную математическую модель задачи ЛП по условию:

$$f = 70x + 100y + 150z \to \max$$

$$\begin{cases} 8x + 10y + 12z \leqslant 90\,000 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ x \leqslant 200,\ y \leqslant 500,\ z \leqslant 500. \end{cases}$$

Решив систему неравенств, можно найти допустимые решения плана выпуска продукции, при которых целевая функция достигает

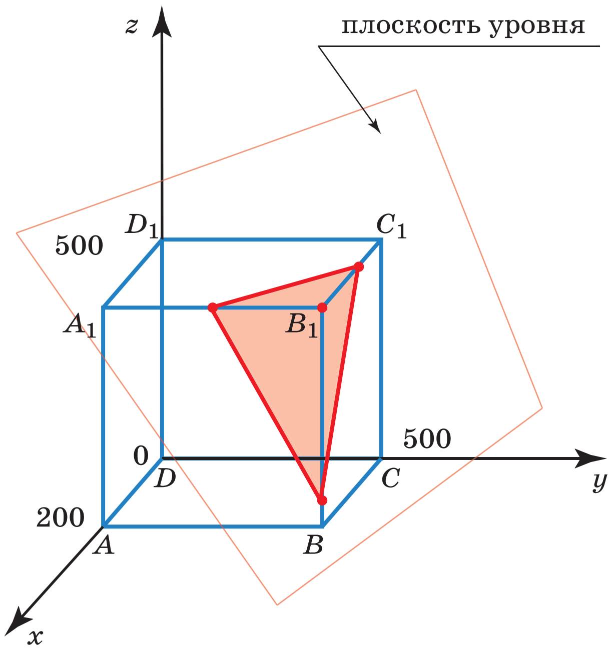


Рис. 4

максимального значения. Так как в задаче рассмотрены три переменные (наборы x, y, z), то множеством допустимых решений является многогранник. По чертежу (рис. 4) можно найти координаты его вершин.

Подставив координаты вершин многогранника в целевую функцию, выберем её максимальное значение $f(B_1) = 139\ 000$.

Есть и другой способ решения.

Алгоритм, который также применяется к решению этой задачи, носит название симплекс-метода. Первые задачи такого рода решались на множествах вида $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1$, где $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ... $x_n \geqslant 0$.

Симплекс-метод (от лат. *simplex* — простой и от греч. *methodos* — путь исследования) позволяет получить оптимальное решение задачи ЛП за конечное число повторяемых шагов (называемых итерацией). Итерация начинается с опорного решения и движется в поисках наилучшего варианта по угловым точкам многогранника — области допустимых решений — до тех пор, пока не найдёт значение, при котором целевая функция достигает оптимального значения.

Для того чтобы понять, как решать задачу ЛП с помощью симплекс-метода, разберём простой пример.

Задана целевая функция $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Введение вспомогательных переменных с целью превратить неравенства в равенства. В нашем случае вводим две новые переменные s_1 и s_2. Неравенства примут вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ s_1 \geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Шаг 2. Определение некоторой вершины многоугольника допустимых решений (опорного решения). Для простоты в качестве такой вершины берут начало координат, если оно принадлежит множеству допустимых решений. Итак, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Тогда $s_1 = 6$, $s_2 = 8$. Значит, в этой вершине целевая функция равна нулю. Это первое допустимое решение (вершина *1*).

Шаг 3. Составление системы ограничений и целевой функции относительно тех переменных, которые равны нулю.

$$\begin{cases} s_1 = 6 - 2x_1 - x_2 \\ s_2 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ F = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Шаг 4. Поиск наилучшего решения. Переход к некоторой соседней вершине.

Для каждого x_1 и x_2 в отдельности необходимо определить, насколько можно увеличить их, соблюдая ограничения, и насколько при этом возрастёт целевая функция.

Помня, что s_1 и s_2 должны быть неотрицательны, x_1 может возрастать до 3 в первом равенстве и до 8 — во втором равенстве.

Следовательно, максимально возможное увеличение x_1, удовлетворяющее обоим равенствам, равно 3. Целевая функция при этом возрастает до 9. Максимально возможное увеличение x_2 равно 4. При этом целевая функция возрастает на 8. Получаем

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ s_1 = 0,\ s_2 = 5,\ F = 9.$$

Это второе допустимое решение (вершина *2*).

Рис. 5

Так процесс перемещения продолжается, как показано на рисунке 5.

Симплекс-метод основан на двух положениях:

— оптимальное значение целевой функции задачи ЛП находится на границе множества допустимых решений, причём в вершине многогранного множества, если решение единственно, и по крайней мере в двух вершинах, если решений больше одного;

— количество вершин у многогранного множества допустимых решений задачи ЛП конечно.

Таким образом, симплекс-метод позволяет решать задачи в n-мерном пространстве (количество переменных n). Нужно учитывать следующее: чем больше переменных, тем более громоздким становится процесс генерирования последовательности вершин множества допустимых решений. Именно поэтому данный метод используется в программе MS Excel и расчёты ведутся с помощью интернет-калькуляторов.

Далее показано, как алгоритм симплекс-метода реализован в табличном процессоре Excel.

Решение задач линейного программирования в MS Excel

1) Для решения задачи понадобится дополнительная надстройка Excel **Пакет анализа**. Как её включить, см. Приложение 1 (с. 150). Откроем таблицу Excel. Внесём в неё данные задачи (рис. 6).

Для этого ячейки $A1$, $B1$, $C1$ выделяем и объединяем. Вписываем в них слово «переменные». В ячейках $A2$, $B2$, $C2$, $A3$, $B3$, $C3$ размещаем таблицу:

x_1	x_2	x_3

В строку 4 вписываем слова «коэффициенты целевой функции». В строку 5 вносим значения коэффициентов целевой функции 70,

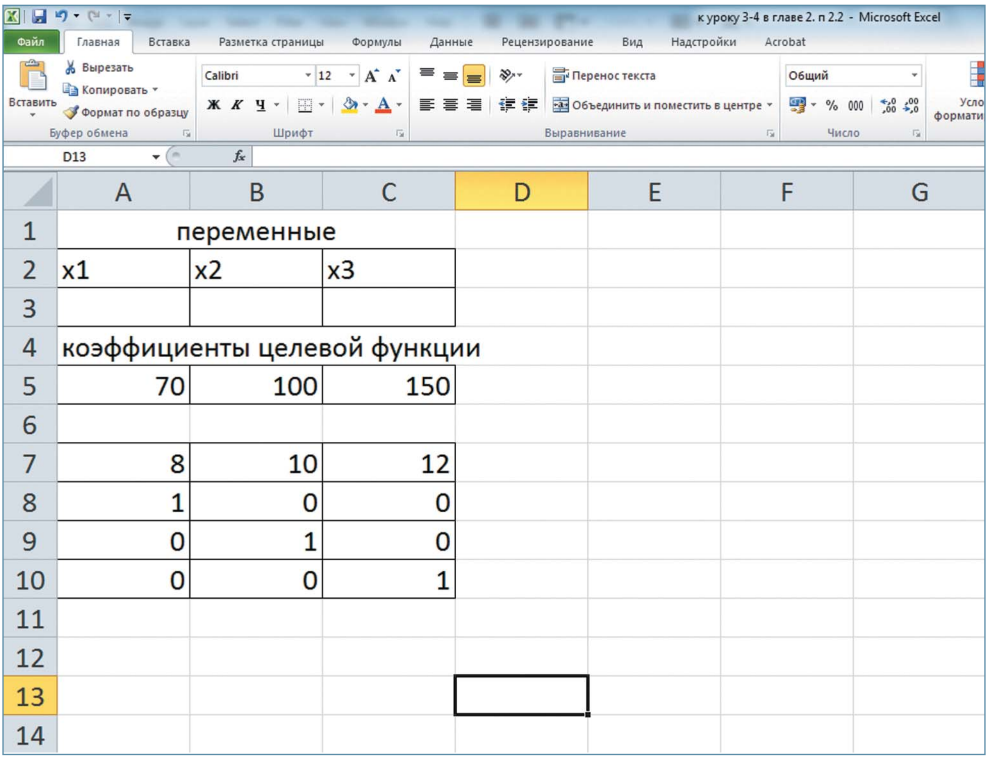


Рис. 6

100 и 150. В строках 7, 8, 9, 10 размещаем таблицу коэффициентов системы ограничений.

2) В ячейку $E4$ впишем слово «значение» (рис. 7). В ячейку $E5$ впишем формулу вычисления значений целевой функции, начиная со знака «=»:

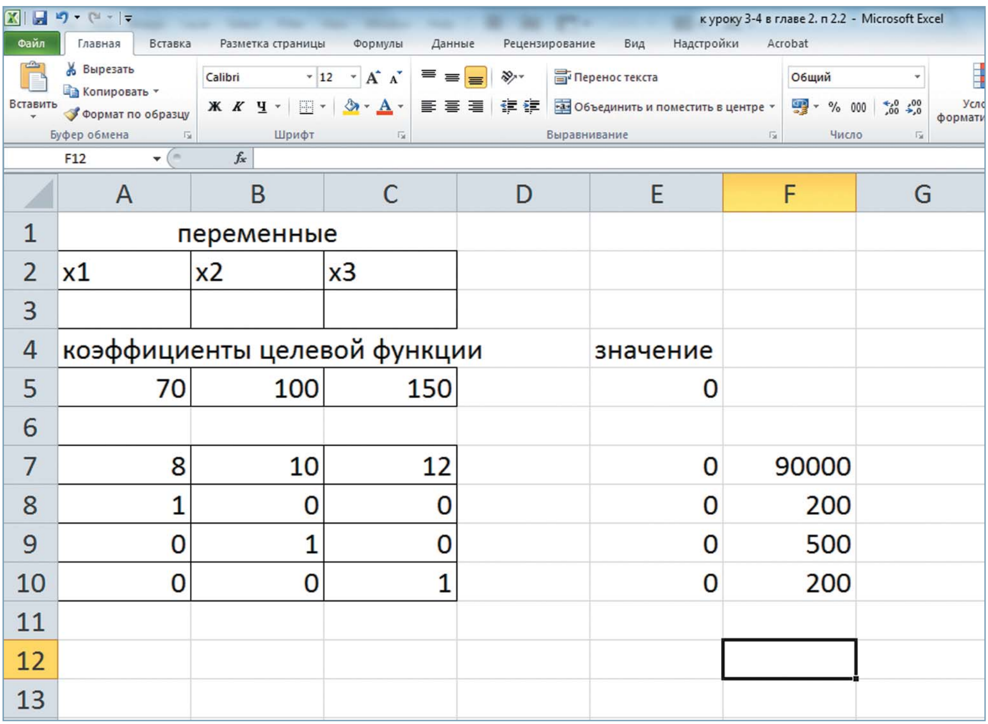
$$= A5 \times A3 + B5 \times B3 + C5 \times C3.$$

Нажимаем клавишу «Enter».

Далее в ячейки $E7$, $E8$, $E9$, $E10$ внесём выражения левых частей системы ограничений, начиная со знака «=». После ввода каждого выражения надо нажать клавишу «Enter».

$$= A7 \times A3 + B7 \times B3 + C7 \times C3.$$
$$= A8 \times A3 + B8 \times B3 + C8 \times C3.$$
$$= A9 \times A3 + B9 \times B3 + C9 \times C3.$$
$$= A10 \times A3 + B10 \times B3 + C10 \times C3.$$

В ячейки $F7$, $F8$, $F9$, $F10$ вводим правые части системы ограничений — числа 90 000, 200, 500 и 200.



	A	B	C	D	E	F	G
1	переменные						
2	x1	x2	x3				
3							
4	коэффициенты целевой функции				значение		
5	70	100	150		0		
6							
7	8	10	12		0	90000	
8	1	0	0		0	200	
9	0	1	0		0	500	
10	0	0	1		0	200	
11							
12							
13							

Рис. 7

3) Выбираем **«Данные»** и **«Поиск решения».** Открывается диалоговое окно (рис. 8).

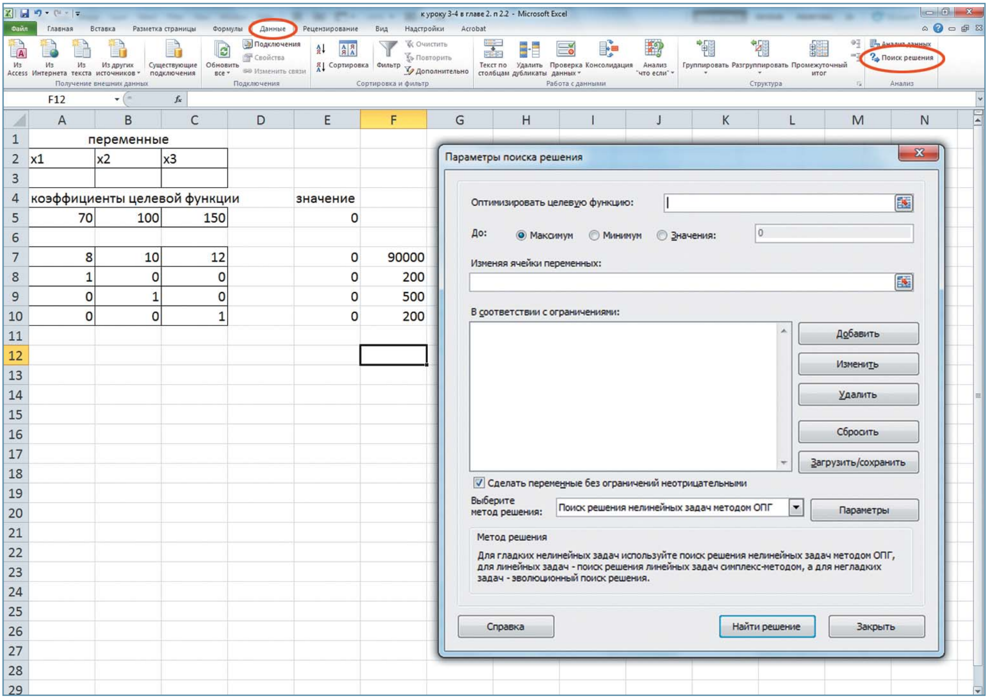


Рис. 8

4) В диалоговом окне в строку «Оптимизировать целевую функцию» вводим содержание ячейки $E5$ (рис. 9). Выбираем в строке «До» кнопку «Максимум».

В строку «Изменения ячейки переменных» вносим содержание ячеек $A3$, $B3$, $C3$. В окно «Изменения ограничений», нажав «Добавить», вносим содержание ячейки $E7$ в строку «Ссылка на ячейки». Выбираем знак «$\leqslant$». В строку «Ограничения» вносим содержание ячейки $F7$. Ту же последовательность шагов выполняем для ячеек $E8$ и $F8$, $E9$ и $F9$, $E10$ и $F10$. Нажав «Добавить» в строке **«Ссылки на ячейки»**, внесём $A3$, $B3$, $C3$. Выбираем знак «$\geqslant$». В строке «Ограничения» ставим 0, тем самым вводя неотрицательность решений.

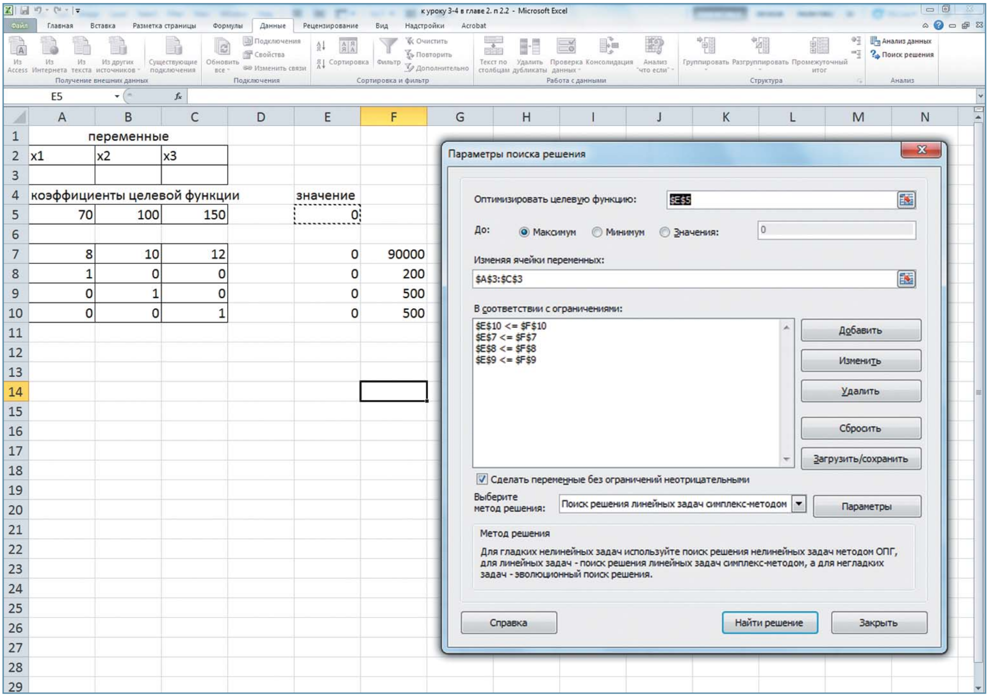

к уроку 3-4 в главе 2. п 2.2 - Microsoft Excel
переменные
x1
x2
x3
коэффициенты целевой функции
значение
70 100 150
0
8 10 12 0 90000
1 0 0 0 200
0 1 0 0 500
0 0 1 0 500
Параметры поиска решения
Оптимизировать целевую функцию: $E$5
До: Максимум Минимум Значения: 0
Изменяя ячейки переменных:
$A$3:$C$3
В соответствии с ограничениями:
$E$10 <= $F$10
$E$7 <= $F$7
$E$8 <= $F$8
$E$9 <= $F$9
Добавить
Изменить
Удалить
Сбросить
Загрузить/сохранить
Сделать переменные без ограничений неотрицательными
Выберите метод решения: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Параметры
Метод решения
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.
Справка
Найти решение
Закрыть

Рис. 9

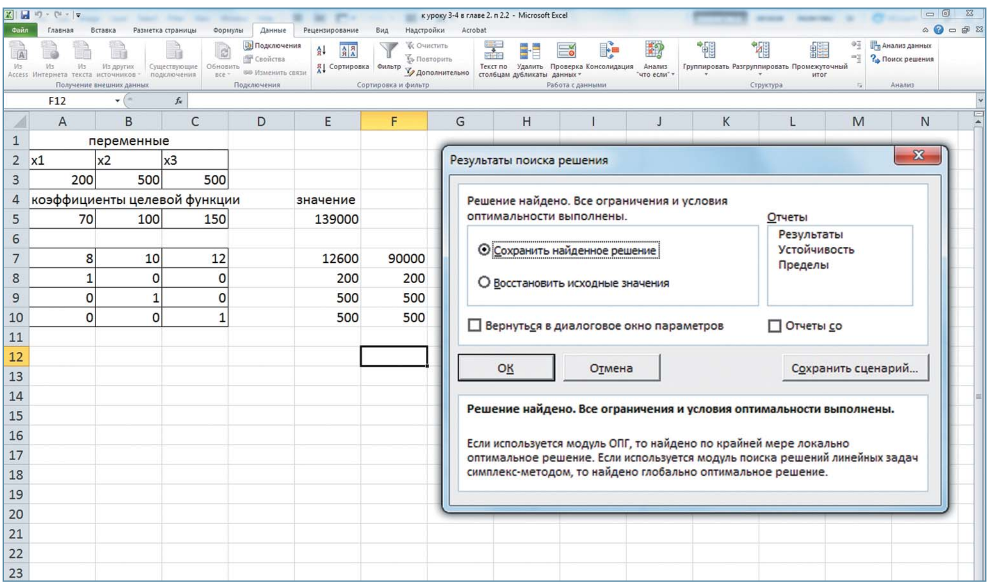

к уроку 3-4 в главе 2. п 2.2 - Microsoft Excel
переменные
x1
x2
x3
200 500 500
коэффициенты целевой функции
значение
70 100 150
139000
8 10 12 12600 90000
1 0 0 200 200
0 1 0 500 500
0 0 1 500 500
Результаты поиска решения
Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Отчеты
Сохранить найденное решение
Восстановить исходные значения
Результаты
Устойчивость
Пределы
Вернуться в диалоговое окно параметров
Отчеты со
ОК
Отмена
Сохранить сценарий...
Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Если используется модуль ОПГ, то найдено по крайней мере локально оптимальное решение. Если используется модуль поиска решений линейных задач симплекс-методом, то найдено глобально оптимальное решение.

Рис. 10

5) В строке диалогового окна **«Выберите метод решения»** выберем «Поиск решения линейных задач симплекс-методом». Этот метод позволяет решать задачи большей размерности. Далее нажимаем «Найти решение» (рис. 10). Получаем ответ. Сохраняем его.

Если бы решение нас не устроило, мы могли бы выбрать строку диалогового окна **«Вернуться в диалоговое окно параметров»** и поискать ошибки. В нашей задаче максимальное значение целевой функции равно 139 000. Достигается оно при реализации всей продукции фирмы.

Выведем общий алгоритм составления задачи ЛП.

АЛГОРИТМ:

Внимательно прочитайте текст задачи и попробуйте составить математическую модель ситуации, выполнив следующие шаги:

а) Выберите величины, значения которых надо определить. Введите для них буквенные обозначения.

б) Составьте систему ограничений в виде неравенств или уравнений.

в) Выберите величину, характеризующую целевую функцию в задаче. Запишите выражение целевой функции.

г) Выберите метод решения (аналитический, симплекс-метод).

д) Запишите проверенный ответ в виде предложения, составленного по тексту задачи.

е) Если в табличном процессоре Excel решение получить не удаётся (Excel даёт нулевое решение), решите задачу аналитическим или графическим методом.

В последующих параграфах будут рассмотрены примеры экономических ситуаций, сводящихся к задачам ЛП.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ▶ В салон поступило 40 телефонов и 36 планшетов на общую сумму 1200 у. е. и 36 таких же телефонов и 40 планшетов на общую сумму 1270 у. е. Цена каждого из товаров не была указана. Определите их цены, чтобы запустить товары в продажу и получить максимальную прибыль.
Ответ: 7,5 у. е. за телефон и 25 у. е. за планшет.

2. ▶ Если предприятие ежедневно будет делать на 40 единиц продукции больше, чем планируется, то заказ будет выполнен на 5 дней раньше срока. Если предприятие ежедневно будет делать на 20 единиц продукции больше, то заказ будет выполнен на 3 дня раньше. За сколько дней и сколько единиц продукции в день надо изготавливать, чтобы сделать заказ в срок?
Ответ: за 15 дней по 80 единиц продукции в день.

3. Выясните, имеет ли решение данная система уравнений и какую геометрическую фигуру она задаёт:

а) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 2 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \\ 3x + 4y + z - 16 = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x + 2z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Ответ: а) система решений не имеет, задаёт тетраэдр; б) система решений не имеет, задаёт пирамиду.

4. Задача (*на определение издержек производства*). Издержки производства 100 планшетов составляют 300 у. е., 500 планшетов — 600 у. е. Рассчитайте издержки производства 400 планшетов, если известно, что функция издержек — линейная: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$, где за x принято количество планшетов, а за y соответствующие издержки.
Указание:

Шаг 1. $y - 300 = \frac{600 - 300}{500 - 100} \cdot \left(x - 100\right) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 225.$

Шаг 2. $y = \frac{3}{4} \cdot 400 + 225 \Rightarrow y = 525.$

Ответ: издержки производства 400 планшетов составляют 525 у. е.

5. ▶ Выясните, задаёт ли система неравенств ограниченную область плоскости.

а) $\begin{cases} -3x + 5y \leqslant 10 \\ 5x + 2y \leqslant 35 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y \leqslant 4 \\ -x + 3y \geqslant 35 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + y \leqslant 2 \\ 5x - y \leqslant 10 \end{cases}$

6. ▶ Составьте уравнение границы полуплоскости, проходящей через точки:
а) $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$; б) $A(1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$; в) $D(0;\ 4)$, $C(1;\ 1)$.

7. ▶ Составьте систему неравенств, задающих внутреннюю область треугольника ABC (условие из задания 6).

8. Решите составленную математическую модель любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel).

а) Целевая функция записана в виде $F = x + 2y \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \leqslant 6 \\ 3x + 10y \leqslant 26 \\ x + 11y \leqslant 20 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$$

б) Целевая функция записана в виде $F = x + y \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x + 4y \leqslant 16 \\ 4x + 8 \leqslant 2y \\ x + 3y \leqslant 9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$$

в) Целевая функция записана в виде $F = x + y \to \min$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x + 4y \leqslant 16 \\ 4x + 8 \leqslant 2y \\ x + 3y \leqslant 9 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$$

Ответ: а) $x = 34/7$; $y = 8/7$; $F = 50/7$; б) $x = 6$; $y = 1$; $F = 7$; в) $x = 0$; $y = 0$; $F = 0$.

2.3 Задача составления плана производства

Некоторое предприятие (пекарня) выпускает 3 вида продукции, затрачивая при этом 3 вида ресурсов (сырьё, рабочая сила, электроэнергия). Технология производства описывается коэффициентами a_{11}, ..., a_{33}. Это означает, что, например, a_{11} — количество 1-го ресурса, затрачиваемого на производство 1-го продукта; a_{12} — количество 1-го ресурса, затрачиваемого на 2-й продукт; a_{21} — количество 2-го ресурса, затрачиваемого на производство 1-го продукта; b_1 — запас 1-го ресурса на складе и т. д.

Продукция реализуется по заданным ценам c_1, c_2, c_3. Затраты на производство каждого вида продукции растут прямо пропорционально объёмам производства: x_1 — объём производства 1-го продукта, x_2 — 2-го продукта, x_3 — 3-го продукта.

Запасы ресурсов выражаются неравенствами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{13}x_3 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{23}x_3 \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{33}x_3 \leqslant b_3 \end{cases}$$

Доход от реализации должен быть наибольшим:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max.$$

Задача ЛП заключается в том, чтобы найти такие значения x_1, x_2, x_3, чтобы прибыль предприятия была максимальной. Другими словами, необходимо составить оптимальный план производства.

Пример 3. Пекарня выпускает лаваши, батоны, буханки. Ресурсы (сырьевые): мука, вода, дрожжи (см. таблицу).

	Лаваш	Батон	Буханка	*b*
Мука, кг	1,0	0,9	1,2	100
Вода, л	0,4	0,5	0,3	50
Дрожжи, кг	0,01	0,01	0,03	10
Цена, р.	35	22	28	

x_1, x_2, x_3 — количество каждого продукта, b_1, b_2, b_3 — запас каждого сырья на складе.

Необходимо определить оптимальный план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия будет максимальной.

Составим математическую модель задачи ЛП:

$$\begin{cases} 1{,}0x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}2x_3 \leqslant 100 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}3x_3 \leqslant 50 \\ 0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}03x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$35x_1 + 22x_2 + 28x_3 \to \max.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составьте математическую модель и решите задачу ЛП с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel). Запишите полный ответ к каждой задаче.

1. Предприятие выпускает три вида изделий. Для выпуска изделий используют материалы, ежемесячные затраты которых не могут превышать 61 000 кг. На одно изделие первого вида расходуется 8 кг

материала, второго вида — 10 кг, третьего вида — 11 кг. Оптовая цена одного изделия первого вида 7 000 р., второго и третьего — соответственно 10 000 р. и 9 000 р. Определите оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимальную выручку, и рассчитайте максимальный размер выручки.
Ответ: 200 изделий первого вида, 1800 — второго вида, 1500 — третьего вида; максимальная выручка равна 32 900 р.

2. При производстве продукции P_1 и P_2 используют 4 группы оборудования A, B, C и D. На выпуск единицы продукции P_1 в единицу времени расходуется 1; 0,5; 2 и 0 единиц оборудования A, B, C и D соответственно, а единицы продукции P_2 — 1; 1; 0 и 2 единиц оборудования A, B, C и D. Фонд рабочего времени группы A составляет 18, B — 12, C — 24 и D — 18 единиц времени. Предприятие реализует единицу продукции P_1 по цене 40 ден. ед., P_2 — 60 ден. ед. Определите план выпуска продукции, при котором выручка предприятия будет максимальной, и рассчитайте максимальный размер выручки.
Ответ: 12 ед. продукции P_1 и 6 ед. продукции P_2; максимальная выручка равна 840 ден. ед.

3. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоёмкость изготовления шляпы первого фасона вдвое выше трудоёмкости изготовления шляпы второго фасона. Если бы фирма выпускала только шляпы первого фасона, то суточный объём производства мог бы составить 500 шляп. Суточный объём сбыта шляп обоих фасонов ограничен — 200 штук. Прибыль от продажи шляпы первого фасона равна 80 ден. ед., второго фасона — 50 ден. ед. Определите оптимальный план выпуска шляп, максимизирующий прибыль, и максимальный размер прибыли.

Ответ: 200 шляп первого фасона и 100 шляп второго фасона; максимальная прибыль равна 1600 ден. ед.

4. Автомобильная компания производит легковые автомобили и грузовики. Каждое транспортное средство должно обрабатываться в покрасочном и сборочном цехах. Если бы в покрасочном цехе обрабатывались только грузовики, то можно было бы покрасить 40 машин в день. Если бы обрабатывались только легковые ав-

томобили, то можно было бы покрасить 60 машин в день. В сборочном цехе обрабатывается 50 транспортных средств в день. Прибыль от производства одного легкового автомобиля и грузовика составляет 200 и 300 ден. ед. соответственно. Определите оптимальный ежедневный выпуск продукции, обеспечивающий максимальную прибыль компании, и максимальный размер прибыли.
Ответ: 10 легковых автомобилей и 40 грузовиков; максимальная прибыль компании равна 14 000 ден. ед.

5. Процесс изготовления промышленных изделий двух видов X_1 и X_2 состоит в последовательной обработке каждого из них на трёх станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки одного изделия (в мин) на каждом станке указано в таблице. Прибыль от продажи одного изделия вида X_1 составляет 200 $, второго изделия вида X_2 — 300 $.

Станок	Время обработки одного изделия, мин		Лимит времени работы станка в сутки, ч
	Изделие вида X_1	Изделие вида X_2	
1-й	10	5	10
2-й	6	20	10
3-й	8	15	10
Прибыль, $	200	300	

Рассчитайте оптимальный план производства изделий каждого вида, максимизирующий прибыль, и максимальный размер прибыли.
Ответ: 91 изделие типа X_1, 18 изделий типа X_2; максимальная прибыль равна 236 $.

6. Пользуясь таблицей, составьте оптимальный план выпуска патоки и глюкозы, обеспечивающий максимальную прибыль, и вычислите максимальную прибыль. Реализуется 1 т патоки по цене 10 ден. ед., а 1 т глюкозы — по цене 20 ден. ед.

Операция	Норма затрат времени на 1 т продукции, ч		Норма времени работы оборудования при выполнении каждой операции, ч
	Патока	Глюкоза	
1. Расщепление	0,2	0,4	8
2. Выжимка	0,2	0,6	3
3. Варение	0,5	0,2	4

Ответ: 4,5 т патоки и 3,5 т глюкозы; максимальная прибыль равна 115 ден. ед.

2.4 Задача о рационе

При организации питания коллектива людей, например, в больницах, санаториях, школах, детских садах и т. д., возникает задача — составить наиболее рациональное питание, удовлетворяющее определённым медицинским требованиям.

Рассмотрим подобную задачу.

Пусть рацион составлен на 4 продукта (закупка остальных продуктов не требует расчёта): хлеб, молоко, мясо, овощи. В этих продуктах учитываются белки, жиры, углеводы и витамины. Запишем их содержание в каждом продукте и занесём данные в таблицу.

	Мясо	Молоко	Хлеб	Овощи	b
Белки	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
Жиры	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
Углеводы	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
Витамины	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4

a_{11} — количество белков в 100 г мяса; a_{12} — количество белков в 100 г молока; a_{21} — количество жиров в 100 г мяса и т. д.

b_1 — минимальное количество белков, которое должно потребляться, например, отдыхающими людьми в санатории в расчёте, скажем, на месяц; b_2 — минимальное количество жиров, которое должно потребляться людьми, и т. д.

c_1 — цена мяса, x_1 — количество мяса;
c_2 — цена молока, x_2 — количество молока;
c_3 — цена хлеба, x_3 — количество хлеба;
c_4 — цена овощей, x_4 — количество овощей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{14}x_{14} \geqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41}x_1 + \ldots + a_{44}x_4 \geqslant b_4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \rightarrow \min$$

Среди всех рационов питания, удовлетворяющих минимальным потребностям в питательных веществах, выбирают самый дешёвый.

К такому же типу задач ЛП относятся задачи, касающиеся проблем, связанных с изготовлением различных смесей (сплавов металлов, химических веществ, производства нефтепродуктов и др.).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составьте математическую модель и решите задачу ЛП с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel). Запишите полный ответ к каждой задаче.

1. Фармацевтическая фабрика ежедневно производит не менее 800 фунтов пищевой добавки — смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в таблице (в фунтах на фунт муки):

	Кукурузная	Соевая
Белок (в фунтах на фунт муки)	0,09	0,6
Клетчатка (в фунтах на фунт муки)	0,02	0,06
Стоимость (в долл. за фунт)	0,3	0,9

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30% белка и не более 5% клетчатки. Фирма хочет определить рецептуру смеси при минимальной стоимости с учётом требований диетологов.

Ответ: в результате решения получаем $x_1 = 0$ фунтов, а $x_2 = 400$ фунтов, где x_1 — количество фунтов кукурузной муки и x_2 — количество фунтов соевой муки; это означает, что пожелания фирмы выполнить нельзя, чтобы стоимость смеси была минимальной. Следует рекомендовать управляющему фирмы изменить условие минимальности стоимости.

2. Имеются корма двух видов: сено и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве соответственно не более 50 и 85 кг. Составьте кормовой рацион минимальной стоимости, в котором содер-

жится не менее 30 кормовых единиц, не менее 1 кг протеина, не менее 100 г кальция, не менее 80 г фосфора, и рассчитайте минимальную стоимость рациона. Стоимости сена и силоса в расчёте на 1 кг — 12 и 8 ден. ед. соответственно. Данные о питательности кормов приведены в таблице.

Питательные вещества	Корм		Нижняя предельная норма содержания питательных веществ
	Сено	Силос	
Кормовые единицы, кг	0,5	0,3	30
Протеин, г	40	10	1000
Кальций, г	1,25	2,5	100
Фосфор, г	2	1	80

Ответ: сена 50 кг, силоса 85 кг; минимальная стоимость рациона 1280 ден. ед.

3. В опытном хозяйстве установили, что откорм пушного зверя (норки, нутрии, выдры и др.) выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 10 ед. питательного вещества A, не менее 20 ед. вещества B и не менее 30 ед. вещества C. Для кормления животных используется два вида корма. В таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг корма каждого вида. Цена 1 ц корма 1-го вида равна 40 ден. ед., корма 2-го вида — 50 ден. ед. Сколько центнеров корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальны? Рассчитайте минимальные затраты.

Питательные вещества	Виды корма	
	1-й	2-й
A	2	1
B	6	5
C	3	4

Ответ: 2 ц корма 1-го вида, 6 ц корма 2-го вида; минимальные затраты равны 380 ден. ед.

4. В заводской лаборатории создаётся антифрикционный сплав (оловянистый баббит), который должен содержать: олова не меньше 15%, сурьмы не меньше 15%, свинца около 70%. Есть шесть сплавов, процентный состав и цены на которые приведены в таблице. Эти сплавы используются для получения оловянистого баббита.

Элементы	Сплавы					
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Олово, %	12	20	45	35	27	30
Сурьма, %	12	18	15	50	32	50
Свинец, %	76	62	25	43	34	18
Цена за 1 кг, ден. ед.	3,5	5,2	4,6	6,2	5,0	3,7

Сколько килограммов каждого из шести сплавов нужно взять для получения 1 кг оловянистого баббита, чтобы затраты на производство были минимальны? Рассчитайте минимальные затраты.
Ответ: $x_1 = 8{,}9$ кг; $x_2 = 0$ кг; $x_3 = 0{,}5$ кг; $x_4 = 0$ кг; $x_5 = 0$ кг; $x_6 = 0{,}7$ кг, $F = 36$ ден. ед., где x_1 — количество 1-го сплава, x_2 — количество 2-го сплава и т. д., F — минимальные затраты. Это означает, что второй, четвёртый и пятый сплавы очень затратны.

2.5 Транспортная задача

Транспортная задача относится к классу распределительных задач ЛП. Рассмотрим пример.

На двух складах хранится типографская продукция — учебники. Их надо развезти в библиотеки трёх школ района.

a_1, a_2 — запас учебников на каждом складе;

b_1, b_2, b_3 — потребность в учебниках у каждой школы.

Известны затраты по перевозке учебников с каждого склада в каждую школу: c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}. Необходимо распределить учебники по школам так, чтобы затраты на их перевозку были минимальны.

Обозначим x_{11} — количество учебников, перевозимых с 1-го склада в 1-ю школу, x_{12} — количество учебников, перевозимых с 1-го склада во 2-ю школу, и т. д. Тогда план перевозки будет выглядеть так:

	Школа № 1	Школа № 2	Школа № 3
Склад 1-й	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Склад 2-й	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Общее количество перевозимых учебников не превышает их запасов на складах:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant a_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant a_2.$$

Заявки, поданные школами, должны быть выполнены. Поэтому

$$x_{11} + x_{21} = b_1,$$
$$x_{12} + x_{22} = b_2,$$
$$x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Все переменные неотрицательны.

Задача заключается в нахождении шести таких переменных, которые удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant a_2 \\ x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{11} \geqslant 0, \ \ldots, \ x_{23} \geqslant 0 \end{cases}$$

и обращают функцию транспортных расходов в минимум:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

О транспортной задаче Н. Н. Моисеев писал в своей книге [18, с. 135]: «Каждый год в Советском Союзе добывается около 600 миллионов тонн каменного угля. Это огромное количество угля ежегодно перевозится из мест, в которых он производится (около 300 пунктов), до мест, где он потребляется (более 30 000 пунктов). Каждый год надо составлять план перевозок (с учётом всех особенностей), чтобы не только удовлетворить всех потребителей, но и чтобы затраты на перевозку были минимальными... И как бы ни был опытен чиновник, он не сможет в подобной ситуации найти самое экономное решение. Его решение всегда может быть улучшено. Я думаю, что в подобной задаче стоимость перевозок можно всегда уменьшить на 5—7%, а может, и на 10%... Давайте вдумаемся, что означают эти проценты. Я не ошибусь, если скажу, что это многие десятки миллионов рублей. И эти миллионы даст математик!»

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составьте математическую модель и решите задачу ЛП с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel). Запишите полный ответ к каждой задаче.

1. Таблица перевозок топлива имеет вид:

Склад	Запасы топлива, т	Объём потребности в топливе в пункте назначения, т			
		1-й	2-й	3-й	4-й
		50	30	40	50
		Стоимость перевозки 1 т, тыс. р.			
1-й	70	8	4	5	9
2-й	60	6	5	4	8
3-й	40	4	9	7	7

Составьте такой оптимальный план перевозок топлива, чтобы затраты на перевозки были минимальны.

Указание: лучше решать эту задачу в программе MS Excel.

Ответ: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 30$; $x_{13} = 40$; $x_{14} = 0$; $x_{21} = 10$; $x_{22} = 0$; $x_{23} = 0$; $x_{24} = 50$; $x_{31} = 40$; $x_{32} = 0$; $x_{33} = 0$; $x_{34} = 0$; $F = 940$, где x_{11} — количество топлива, перевозимого с 1-го склада в 1-й пункт, x_{12} — количество топлива, перевозимого с 1-го склада во 2-й пункт, x_{21} — количество топлива, перевозимого со 2-го склада в 1-й пункт, и т. д. Равенство нулю некоторых переменных означает, что некоторые варианты перевозок невыгодны.

2. Банк, предоставляющий полный набор банковских услуг, находится в процессе формирования портфеля кредитов объёмом 12 млн долл. В таблице представлены возможные типы банковских кредитов.

Тип кредита	Ставка кредита	Вероятность безнадёжных долгов
Нецелевые кредиты	0,14	0,1
На покупку автомобилей	0,13	0,07
На покупку жилья	0,12	0,03
Сельскохозяйственные	0,125	0,05
Коммерческие	0,1	0,02

Конкурентная борьба с другими финансовыми институтами вынуждает банк не менее 40% капитала помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не менее 50% от общей суммы нецелевых кредитов, кредитов на покупку автомобилей и жилья. Максимально возможная доля безнадёжных долгов в кредитном портфеле составляет 4%. Банк максимизирует прибыль, т. е. разность между доходом и ожидаемой суммой невозвращённых кредитов. Определите оптимальный план размещения активов для достижения максимальной прибыли банка.

Указание: для решения задачи введите следующие переменные: x_1 — сумма нецелевых кредитов, x_2 — сумма кредитов на покупку автомобилей, x_3 — сумма кредитов на покупку жилья, x_4 — сумма сельскохозяйственных кредитов, x_5 — сумма коммерческих кредитов.

Ответ: $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}15$; $x_3 = 0{,}12$; $x_4 = 0{,}17$; $x_5 = 0{,}1$.

3. В некоторой фирме, являющейся поставщиком нефтепродуктов, осуществляется перевозка топлива. Стоимость перевозки указана в таблице.

Склад	Запасы топлива, т	Стоимость перевозки 1 т топлива в пункт назначения, долл.			
		1-й	2-й	3-й	4-й
1-й склад	80	1100	700	600	500
2-й склад	90	1200	300	750	450

Потребность в топливе отражена в следующей таблице.

Пункт назначения	1-й	2-й	3-й	4-й
Объём потребности, л	50	30	40	50

Определите оптимальный план перевозки топлива и рассчитайте максимальную прибыль этой компании от перевозок.

Указание: в задаче должно быть 8 переменных. Они обозначают количество топлива с одного из складов, перевезённое в один из пунктов назначения при условии, что всё топливо будет развезено.

Ответ: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 30$; $x_{13} = 0$, $x_{14} = 50$, $x_{21} = 50$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 40$, $x_{24} = 0$. Это означает, что в первый пункт надо везти топливо только со второго склада, во второй пункт — только с первого склада, в третий пункт — только со второго, а в четвёртый пункт — только с первого склада. Причём запасы на складах удовлетворяют такому оптимальному плану доставки топлива.

2.6 Задача комплексного использования сырья на примере рационального раскроя материала

Пример 4. Рулоны ткани длиной 8,5 м следует разрезать на куски длиной 1,5; 2,4; 3,2 м. При этом кусков по 1,5 м должно быть не менее 25 шт., кусков по 2,4 м — не менее 16 шт., кусков по 3,2 м — не менее 20 шт. Надо составить план раскроя ткани, при котором количество раскроенных рулонов минимально.

Математическая модель раскроя строится в два этапа.

На первом этапе производится построение вариантов раскроя, в результате которого определяется:

— количество вариантов;

— количество заготовок (кусков) каждого вида, получаемых при различных вариантах раскроя. Построение вариантов раскроя единицы исходного материала (рулона) осуществляется в виде следующей таблицы.

Вариант раскроя	L_1 = 1,5 м	L_2 = 2,4 м	L_3 = 3,2 м
1-й	1	0	2
2-й	0	2	1
3-й	1	1	1
4-й	2	0	1
5-й	0	3	0
6-й	2	2	0
7-й	2	1	0
8-й	5	0	0
9-й	3	0	1
10-й	4	1	0

Пусть L_1, L_2, L_3 — куски ткани соответственно по 1,5; 2,4; 3,2 м.

Длины кусков в таблице располагаем в порядке убывания. Построение вариантов проводится методом полного перебора.

20, 16 и 25 шт. — необходимое количество кусков соответствующей длины.

Числа в строках таблицы — количество кусков каждого вида при раскрое одного рулона по каждому варианту.

На втором этапе производится непосредственное построение модели.

Введём обозначения неизвестных переменных.

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} — количество рулонов, которое необходимо раскроить по каждому варианту.

Запишем целевую функцию, минимизирующую количество раскроенных рулонов. В целевой функции стоят те переменные, которые обозначают количества рулонов, раскроенных по вариантам с ненулевыми отходами. В нашей задаче нет вариантов с нулевыми отходами, поэтому целевая функция имеет вид

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \to \min.$$

В системе ограничений коэффициенты перед переменными — числа из таблицы вариантов раскроя:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_9 \geqslant 20,$$
$$2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + x_7 + x_{10} \geqslant 16,$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 + 2x_7 + 5x_8 + 3x_9 + 4x_{10} \geqslant 25.$$

Ввиду большого количества переменных эту задачу следует решать с помощью MS Excel (см. параграф 2.2).

В результате решения получаем следующие значения переменных: $x_1 = 131/17 \approx 7{,}7$. Но так как переменные x_1, x_2, x_3 и т. д. выражают количество рулонов, то округляем полученные числа всегда в большую сторону, независимо от цифры после запятой. В данном случае получаем 8 рулонов, раскроенных по первому варианту.

Аналогично $x_2 = 78/17 \approx 4{,}59$. Получаем 5 рулонов, раскроенных по второму варианту.

$x_3 = \ldots = x_9 = 0$

$x_{10} = 116/17 \approx 6{,}82$. Получаем 7 рулонов, раскроенных по десятому варианту.

Таким образом, минимальное количество рулонов для раскроя равно 20.

Применение математических моделей при раскрое промышленных материалов позволяет экономить до 20% их объёма.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Леонид Витальевич Канторович (1912—1986) — советский математик, решил задачу оптимального раскроя кож, которая сразу же на несколько процентов уменьшила количество отходов дефицитного сырья, что тоже давало многомиллионную экономию.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составьте математическую модель и решите задачу ЛП с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel).

1. Для пошива одного изделия определённого фасона требуется выкроить из ткани 6 видов деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. Ниже в таблице приведены характеристики вариантов раскроя отреза ткани длиной 10 м^2 и комплектность, т. е. количество деталей определённого вида, которое необходимо для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного фасона составляет 12 000 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 90 изделий. Подберите оптимальное реше-

ние, позволяющее в ближайший месяц выполнить план по пошиву с минимальным количеством отходов.

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез						Отходы, м^2/отрез
	1	2	3	4	5	6	
1-й	40	60	10	5	30	10	0,2
2-й	20	30	30	10	3	5	0,3
Комплектность, шт./изделие	1	2	2	2	2	2	

Указание: для решения задачи введите следующие переменные: x_1 — количество кусков ткани, раскроенных первым способом; x_2 — количество кусков ткани, раскроенных вторым способом.
Ответ: 3 куска ткани по 10 м раскраиваются первым способом и 30 кусков ткани по 10 м раскраиваются вторым способом. В этом случае отходы будут минимальны.

2. На предприятии имеется 68 брёвен длиной 6,5 м, которые необходимо распилить на заготовки длиной l_1, l_2, l_3 м в количестве p_1, p_2, p_3 соответственно. Необходимо составить варианты распила материала и подобрать оптимальное решение, которое обеспечивает минимальные отходы при условии выполнения плана распила заготовок. Исходные данные приведены в таблице.

Размеры заготовок, м			Количество заготовок, шт.		
l_1	l_2	l_3	p_1	p_2	p_3
2,1	2,3	1,4	600	900	910

Указание: см. задачу в тексте параграфа.

Ответ: $x_1 = 450$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1340/9 \approx 148{,}89$; $x_4 = 0$; $x_5 = 460/3 \approx$ $\approx 153{,}39$, x_1 — количество брёвен при распиле по первому варианту, x_2 — количество брёвен при распиле по второму варианту и т. д. Это означает, что для оптимального решения подходят первый, третий и пятый варианты распила брёвен. По первому варианту потребуется распилить 450 брёвен, по третьему — 149, а по пятому — 154. В итоге общее количество брёвен для распила равно 753 ($6770/9 \approx 752{,}22$).

3. В районе лесного массива имеются лесопильный завод и фанерная фабрика. На лесопильном заводе из 3 м^3 еловых и 9 м^3 пихтовых лесоматериалов получают 3 м^3 коммерчески реализуемых комплектов

пиломатериалов. На фанерной фабрике из 8 м^3 еловых и 16 м^3 пихтовых лесоматериалов изготавливают 100 м^2 фанеры. В течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 120 м^3 пиломатериалов и 9600 м^2 фанеры. Доход при реализации 1 м^3 пиломатериалов составляет 3000 ден. ед., а при реализации 100 м^2 фанеры — 12 000 ден. ед. Определите, существует ли оптимальное решение для производства пиломатериалов и фанеры, максимизирующее прибыль.

Ответ: оптимального решения при заданных условиях не существует, так как целевая функция не достигает своего минимума, следует менять технологию распила.

4. Площадь пашни на ферме возросла на 120 га. На этой площади сеют просо и гречиху. Гречихи нужно получить не менее 1000 ц. Для выращивания культур используют удобрения. На ферме всего 800 ц удобрений. Используя данные, приведённые в таблице ниже, составьте модель распределения добавленной площади пашни под просо и гречиху так, чтобы прибыль была максимальна, и найдите решение задачи.

	Просо	Гречиха
Расход пашни на 1 ц культуры, га	0,04	0,08
Расход удобрений на 1 га, ц	0,6	0,2
Прибыль за 1 ц, у. е.	20	30

Ответ: 1000 ц проса получат с 40 га добавленной площади и 1000 ц гречихи с 80 га добавленной площади. В этом случае прибыль от реализации урожая будет максимальной и будет равна 50 000 у. е.

5. Имеется 69 труб для отопительной сети по 1070 см каждая. Их необходимо разрезать на трубы по 130, 150 и 310 см в комплектности, задаваемой отношением 1 : 4 : 2. Подберите вариант распила поступивших труб, при котором отходы были бы минимальны.

Вариант оптимального распила труб

Вариант распила	Труба длиной 310 см, шт.	Труба длиной 150 см, шт.	Труба длиной 130 см, шт.	Отходы, см
1-й	3	0	1	10
2-й	2	3	0	0
3-й	2	2	1	20
4-й	2	1	2	40
5-й	2	0	3	60
6-й	1	3	2	50
7-й	1	2	3	70
8-й	1	1	4	90
9-й	1	0	5	110

Указание: задача решается методом перебора вариантов.
Ответ: наиболее выгодный вариант распила труб, при котором отходы были бы минимальны, — 6-й вариант.

2.7 Задача загрузки оборудования

Этот тип задач встречается при размещении заказов на предприятиях с одинаковыми видами деятельности, например в типографиях, на ткацких фабриках, заводах по выпуску однотипного оборудования и др. Кроме того, решение задачи такого типа поможет правильно распределить посевные площади.

Пусть типографии требуется напечатать по плану учебники по истории k_1 шт., по русскому языку — k_2 шт., по математике — k_3 шт., по английскому языку — k_4 шт. Учебники печатаются на станках D_1, D_2, D_3, D_4 различной мощности. Также известны следующие величины: a_{11} — норма времени на печать одного учебника по истории на станке D_1; a_{12} — норма времени на печать одного учебни-

ка по русскому языку на станке D_1 и т. д. Для станков D_2, D_3, D_4 также известны нормы времени на выпуск каждого вида учебника. M_1 — фонд времени станка D_1, M_2 — фонд времени станка D_2 и т. д., c_{11} — себестоимость печати учебника по истории на первом станке и т. д. Внесём эту информацию в таблицу.

Вид станка	Норма времени на печать одного учебника				Фонд времени станка
	по истории	по русскому языку	по математике	по английскому языку	
D_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	M_1
D_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	M_2
D_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	M_3
D_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	M_4
План выпуска, шт.	k_1	k_2	k_3	k_4	

x_{11} — количество учебников по истории, напечатанных на станке D_1. Тогда $a_{11}x_{11}$ — фактическая затрата времени на их обработку.

Составим систему ограничений и целевую функцию:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + a_{14}x_{14} \leqslant M_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{41}x_{41} + a_{42}x_{42} + a_{43}x_{43} + a_{44}x_{44} \leqslant M_4 \\ x_{11} \geqslant 0,\ x_{12} \geqslant 0,\ \dots,\ x_{44} \geqslant 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = k_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = k_4 \end{cases}$$

$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{44}x_{44}$ — общая себестоимость печати учебников должна стремиться к минимуму. Следует заметить, что даже при небольшом количестве данных задачи (4 станка и 4 учебника) неизвестных величин x получается 16 штук. Уменьшив в задаче количество станков и учебников, можно увидеть, как формируются индексы переменных величин.

Допустим, что станка всего лишь два, а учебников три. Тогда система ограничений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} \leqslant M_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} \leqslant M_2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = k_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = k_2 \\ x_{11} \geqslant 0,\ x_{12} \geqslant 0,\ x_{13} \geqslant 0,\ x_{21} \geqslant 0,\ x_{22} \geqslant 0,\ x_{23} \geqslant 0 \end{cases}$$

А целевая функция будет функцией шести переменных:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составьте математическую модель и решите задачу ЛП с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel).

1. На трёх группах оборудования необходимо изготовить изделия четырёх видов. Установлен план производства: изделий вида *А* — 1000 шт., вида *Б* — 500 шт., вида *В* — 600 шт., вида *Г* — 300 шт. Данные о себестоимости каждого изделия, трудоёмкости и фонде рабочего времени представлены в таблице.

Оборудование	Себестоимость одного изделия, ден. ед.				Время на изготовление одного изделия, мин				Фонд времени, мин
	А	*Б*	*В*	*Г*	*А*	*Б*	*В*	*Г*	
1-я группа	2,5	2,0	1,0	1,0	6	6,0	3,0	5,0	36 000
2-я группа	3,5	3,0	2,0	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	26 000
3-я группа	3,0	5,0	4,0	4,0	4,0	2,0	1,0	2,0	20 000

Определите оптимальное решение загрузки оборудования, при котором минимизируется себестоимость изготовленных изделий, и вычислите минимальное значение целевой функции.
Ответ: $x_{11} = 1500$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 150$; $x_{14} = 180$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 1200$; $x_{23} = 0$; $x_{24} = 0$; $x_{31} = 500$; $x_{32} = x_{33} = x_{34} = 0$, где x_{11} — количество изделий вида *А*, изготовленных на оборудовании 1-й группы, x_{12} — количество изделий вида *Б*, изготовленных на оборудовании 1-й группы, x_{21} — количество изделий вида *А*, изготовленных на оборудовании 2-й группы, и т. д.; значение целевой функции равно 6675 ден. ед.

2. Для перевозки груза на трёх направлениях могут быть использованы корабли двух видов. Рейс судна в несколько направлений с заходом в несколько портов называется сложным рейсом. Время сложного рейса определено заранее. Рентабельность кораблей при использовании их на различных направлениях характеризуется числами, приведёнными в таблице. В ней указывается также общее время сложного рейса. Минимальные необходимые объёмы перевозки на 1-м направлении составляют 500 т, на 2-м направлении — 600 т и на 3-м направлении — 700 т. Определите, какого вида корабль на каком направлении и на протяжении какого времени необходимо использовать, чтобы обеспечивать максимальную загрузку кораблей с учётом возможного времени сложного рейса.

Вид кораблей	Рентабельность кораблей на направлении, т/км			Общее время сложного рейса, сут.
	1-е направление	2-е направление	3-е направление	
1-й	17	15	12	30
2-й	20	16	8	20

Указание: принять следующие переменные: x_{11} — время использования корабля 1-го вида на 1-м направлении, x_{12} — время использования корабля 1-го вида на 2-м направлении, x_{21} — время использования корабля 2-го вида на 1-м направлении и т. д.

Ответ: $x_{11} = 100/17$ сут.; $x_{12} = 410/17$ сут.; $x_{13} = 0$; $x_{21} = 20$ сут.; $x_{22} = 0$; $x_{23} = 0$. Это означает, что для оптимальной загрузки кораблей с учётом возможного времени сложного рейса корабль 1-го вида надо использовать на 1-м направлении на протяжении почти 6 суток, на 2-м направлении — около 24 суток, а корабль 2-го вида надо использовать лишь на 1-м направлении в течение 20 суток.

3. Для того чтобы вырыть котлован объёмом 1200 м^3, на стройке было выделено три экскаватора. Производительность первого экскаватора 22,5 м^3/ч и расход бензина 10 л/ч, второго экскаватора — 5 м^3/ч и 0,5 л/ч, а третьего — 2 м^3/ч и 2 л/ч. Запас бензина составляет 500 л. Экскаваторы могут работать независимо друг от друга. Если рыть котлован только третьим экскаватором, то бензина заведомо хватит, но это будет очень долго. Сколько часов следует использовать в работе каждый экскаватор, чтобы выполнить работу при наименьшем общем времени работы всех экскаваторов?
Ответ: использовать надо первый экскаватор 49 ч, второй экскаватор — 19,4 ч, третий экскаватор не использовать совсем; значение целевой функции равно 68,4 ч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Аналитик решал задачи на оптимизацию функции $F(x)$ при заданных ограничениях графическим методом и нашёл ответ. Проверьте этот ответ в табличном процессоре Excel.

а) $240x_1 + 240x_2 + 240x_3 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 100 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \leqslant 250 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $5x_1 + 6x_2 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geqslant 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 4 \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

в) $x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1 = 0$; $x_2 = 75/4$; $x_3 = 25/3$; $F = 6500$; б) $x_1 = 0$; $x_2 = 1{,}5$; $F = 9$; в) $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 5$; $F = 15$.

2. Определите наибольшее значение выражения $3x + 2y$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x + y \leqslant 6 \\ x + 2y \leqslant 8 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: наибольшее значение данного выражения равно $10\frac{2}{3}$.

3. Определите наибольшее значение выражения $2x - y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x - y \leqslant 1 \\ 2x + y \geqslant 6 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: нет решения.

4. Определите наибольшее значение выражения $300x + 200y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \leqslant 50 \\ 3x + 2y \leqslant 120 \\ x \geqslant 30 \\ y \geqslant 20 \end{cases}$$

Ответ: наибольшее значение данного выражения равно 12 000 при $x = 40$ и $y = 0$.

5. Определите наименьшее значение выражения $0{,}3x + 0{,}9y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \geqslant 800 \\ 0{,}21x - 0{,}3y \leqslant 0 \\ 0{,}03x - 0{,}01y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: наименьшее значение данного выражения равно 7440/17 при $x = 8000/17$, $y = 5800/17$.

6. Определите наибольшее значение выражения $5x + 3y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \leqslant 4 \\ 5x + 2y \leqslant 10 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: наибольшее значение данного выражения равно 40/3 при $x = 2/3$ и $y = 10/3$.

7. Решите задачу ЛП на минимум:

$$3x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geqslant 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0{,}04$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1{,}38$; $x_4 = 0$; $F = 7$.

8. Собственные средства банка в день в сумме с депозитами — 100 000 у. е. Часть этих средств, но не менее 35 000 у. е., должна быть размещена в кредитах. Кредиты считаются низколиквидными активами банка (в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь достаточно трудно). Другое дело — ценные бумаги. Их можно в любой момент продать, получив прибыль. В ценных бумагах должно быть размещено не менее 30% активов банка. Доходность кредитов — 0,6%. Доходность ценных бумаг — 0,2%. Цель банка: разместить собственные средства так, чтобы получить максимальный доход от кредитов и ценных бумаг.

Рассчитайте оптимальный план размещения собственных средств банка и вычислите его максимальный доход в день.
Ответ: 70 000 у. е. размещено в кредитах и 30 000 у. е. — в ценных бумагах; F = 48 000 у. е.

9. По условию задачи 8 предлагается разместить собственные средства банка в кредиты и ценные бумаги. Предположим, что собственные средства банка, которые также предлагается разместить в ценные бумаги и кредиты, увеличились на 10 000 у. е. Проанализируйте изменения оптимального решения и подтвердите целесообразность полученных экономических оценок.

10. (*Транспортная задача.*) Аналитик решал в табличном процессоре Excel задачу:

На трёх складах хранится сырьё в количестве 25, 35, 45 т. На объект нужно завезти 72 т сырья. Необходимо найти наиболее выгодный вариант перевозок. Известно, что расстояние от каждого склада до объекта равно: 5, 8, 10 км.
Аналитик получил следующий ответ: со склада A_1 необходимо отправить на объект 10 т, со склада A_2 — 32 т, со склада A_3 — 30 т. Если развозить всё сырьё, хранящееся на складах, то нарушается условие минимальности стоимости перевозок.
Проверьте этот ответ аналитическим или графическим методом.

11. (*Транспортная задача*.) Математик решал аналитическим способом задачу, в которой необходимо было найти наиболее выгодный вариант перевозок материала одного вида на три предприятия из двух городов. Известно, что в городах *А* и *Б* материала 20 и 25 т соответственно. Предприятиям материала надо 10, 15, 20 т соответственно. Расстояния в километрах от городов до предприятий указаны в таблице.

	Предприятие *1*	Предприятие *2*	Предприятие *3*
Город *А*	5	7	10
Город *Б*	3	4	6

Математиком была составлена следующая математическая модель задачи:

$$f = 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 25 \\ x_1 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 15 \\ x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0,\ x_6 \geqslant 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 — количество материала, привезённое из города *А* на предприятия *1*, *2*, *3*;
x_4, x_5, x_6 — количество материала, привезённое из города *Б* на предприятия *1*, *2*, *3*;
f — целевая функция.
Получен ответ: $x_1 = 10$ т, $x_2 = 10$ т, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$ т, $x_6 = 20$ т, $f = 260$ т.
Проверьте этот ответ в табличном процессоре Excel.

Задание к задачам №12—27. Составьте математическую модель и найдите решение задачи с её помощью любым известным вам способом (аналитическим, графическим, в табличном процессоре Excel).

12. В заводской лаборатории создаётся антифрикционный сплав (оловянистый баббит), который должен содержать не меньше 15% олова, не меньше 15% сурьмы, около 70% свинца. Есть четыре сплава, процентный состав и цены на которые приведены в таблице.

Элементы	Сплавы			
	1-й	2-й	3-й	4-й
Олово, %	12	20	12	20
Сурьма, %	12	18	18	14
Свинец, %	76	62	70	66
Цена за 1 кг, ден. ед.	3,5	5,2	4,0	4,6

Сколько килограммов каждого из четырёх сплавов нужно взять для получения 1 кг оловянистого баббита, чтобы затраты на производство были минимальны? Рассчитайте минимальные затраты.

Ответ: $x_1 = 2{,}5$ кг; $x_2 = 0$ кг; $x_3 = 3{,}75$ кг; $x_4 = 3{,}75$ кг; $F = 41$ ден. ед., где x_1 — количество 1-го сплава, x_2 — количество 2-го сплава и т. д., F — минимальные затраты. Это означает, что второй сплав для смеси не годится.

13. Предприятие производит продукцию двух видов: P_1 и P_2. Для изготовления продукции P_1 и P_2 используется одно и то же сырьё, суточный запас которого равен 120 кг. Расход сырья на единицу продукции P_1 равен 12 кг, а на единицу продукции P_2 — 42 кг. Цены продукции P_1 и P_2 — 168 и 284 ден. ед. соответственно. Определите оптимальное решение по распределению сырья в течение суток для изготовления продукции P_1 и P_2, чтобы прибыль от реализации была максимальной, и вычислите максимальное значение прибыли.

Ответ: $x_1 = 10$; $x_2 = 0$; $F = 1680$ ден. ед., где x_1 — количество изделий вида P_1, изготовленных в течение суток, x_2 — количество изделий вида P_2, изготовленных в течение суток, F — максимальное значение прибыли.

14. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены 200 тыс. ден. ед. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 1 тыс. ден. ед., а каждая минута телерекламы — в 20 тыс. ден. ед. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше объёма сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно выделяемых на радио- и телерекламу.

Ответ: $x_1 = 0$ ден. ед.; $x_2 = 200$ тыс. ден. ед.; $F = 8$ млн. ден. ед., где x_1 — средства на телерекламу, x_2 — средства на радиорекламу, F — целевая функция, выражающая доход.

15. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 300 тыс. ден. ед. Его предполагается разместить на площади 45 м^2. Участок может быть оснащён оборудованием трёх видов. Стоимость машины каждого вида, площадь, на которой она размещается, и её производительность за смену даны в таблице (все показатели приводятся на единицу оборудования). Постройте математическую модель задачи и определите с её помощью оптимальное решение приобретения оборудования, обеспечивающего наибольшую производительность всего участка.

Вид машины	Стоимость, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м^2	Производительность, тыс. ед. продукции
1-го вида	60	5	82
2-го вида	15	9	49
3-го вида	30	3	63

Ответ: необходимо купить две машины 2-го вида, 9 машин 3-го вида, машины 1-го вида не приобретать; производительность всего участка будет равна 665 тыс. ед. продукции.

16. В автопарке имеются две машины ЗИЛ и МАЗ грузоподъёмностью 5 т и 7 т, которые должны перевезти 350 т груза. За один рейс ЗИЛ расходует 2 кг смазочных материалов и 50 л горючего, а МАЗ — 3 кг смазочных материалов и 70 л горючего. На складе имеется 72 кг смазочного материала и 720 л горючего. Затраты на эксплуатацию одной машины ЗИЛ составляют 1000 р., а машины МАЗ — 1500 р. Составьте математическую модель задачи и определите, существует ли оптимальный план перевозок, минимизирующий затраты на горюче-смазочные материалы, при заданных условиях.
Ответ: оптимального плана перевозок при заданных условиях нет, так как целевая функция не достигает минимального значения. Необходимо менять условие задачи.

17. Фабрика упаковки выпускает продукцию в виде рулонов упаковочной ткани стандартной ширины по 2 м. По специальным заказам потребителей фабрика поставляет рулоны и меньших размеров, для этого производится разрезание стандартных рулонов. Данные о заказах на рулоны нестандартных размеров приведены в таблице.

Заказ	Ширина рулона, м	Количество рулонов, шт.
№ 1	0,5	17
№ 2	0,7	18
№ 3	0,9	30

Требуется найти сочетания различных вариантов того, как разрезать стандартные рулоны ткани, чтобы поступившие специальные заказы были выполнены с минимальными потерями (отходами). Сколько рулонов упаковочной ткани для этого понадобится?
Ответ: 24 рулона.

18. На складе по заказу необходимо провести раскрой рулонов ткани длиной по 8 м (неограниченное количество рулонов) на куски размерами 1,2; 1,8 и 2,9 м в количествах не менее 16, 20, 12 шт. Как следует раскроить рулоны с минимальным количеством отходов?
Указание: см. задачу в параграфе 2.6.

19. Для пошива одного изделия определённого типа требуется выкроить из ткани 5 видов деталей. На швейной фабрике были разработаны два варианта раскроя ткани. В таблице приведены характеристики вариантов раскроя 15 м^2 ткани и комплектность, т. е. количество деталей определённого вида, которые необходимы для пошива одного изделия. Ежемесячный запас ткани для пошива изделий данного типа составляет 500 м^2. В ближайший месяц планируется сшить 100 изделий. Характеристики вариантов раскроя отрезов ткани по 15 м даны в таблице.

Вариант раскроя	Количество деталей, шт./отрез					Отходы, м^2/отрез
	1	2	3	4	5	
1-й	50	5	10	50	10	0,4
2-й	25	5	20	10	2	0,25
Комплектность, шт./изделие	2	2	2	2	1	

Найдите сочетание вариантов раскроя, минимизирующее отходы производства.
Ответ: надо принять за основной 2-й вариант раскроя. При этом варианте будет раскроено 40 отрезов по 15 м с минимальными отходами.

20. Предприятие может выпускать продукцию двух видов: P_1 и P_2. Используются три вида ресурсов: оборудование, сырьё и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу продукции		Объём ресурса
	P_1	P_2	
Оборудование, шт.	4	6	62
Сырьё, т	2	2	24
Электроэнергия, кВт	4	2	40
Прибыль за единицу продукции, ден. ед.	80	50	

Определите оптимальный для предприятия план выпуска продукции, максимизирующий прибыль, и рассчитайте максимальное значение прибыли.
Ответ: 8 единиц продукции вида P_1 и 4 единицы продукции вида P_2; максимальное значение прибыли равно 840 ден. ед.

21. Для кондитерской фабрики требуется рассчитать оптимальный по прибыли план выпуска карамели. Весь ассортимент карамели разделён на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_3. Для производства карамели требуется сахарный песок, патока, фруктовое пюре. В таблице указаны запасы этих видов сырья, прибыль от реализации 1 т выпускаемой карамели каждого вида, нормы расхода сырья на производство единицы продукции каждого вида.

Вид сырья	Нормы расхода сырья			Запас сырья
	K_1	K_2	K_3	
Сахарный песок, т Патока, т Фруктовое пюре, т	0,8 0,4 0,3	0,5 0,4 0,7	0,8 0,4 0,1	700 300 150
Прибыль от реализации 1 т продукции, ден. ед.	1000	1100	1200	

Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. Определите оптимальный план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации, и вычислите максимальное значение прибыли.
Ответ: карамель вида K_1 не выпускать, карамели вида K_2 выпустить 125 т, карамели вида K_3 выпустить 625 т. Прибыль составит 262 500 ден. ед.

22. Для производства компьютеров и телевизоров предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление одного компьютера и одного телевизора, а также общее количество сырья данного вида и прибыль от реализации одного изделия каждого вида записаны в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья		Общее количество сырья
	Компьютер	Телевизор	
1-й 2-й 3-й	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия, у. е.	30	40	

Определите оптимальный план выпуска, чтобы прибыль была максимальной, и вычислите максимальное значение прибыли.

Ответ: 12 компьютеров и 18 телевизоров; прибыль составит 1080 у. е.

23. Себестоимость каждого вида продукции (A, B, C) соответственно равна 50, 100, 120 ден. ед. Определите, если такой есть, оптимальный план выпуска продукции в день при минимальной себестоимости. Данные для расчёта даны в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на единицу продукции			Расход на день
	A	B	C	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Ответ: целевая функция минимального значения не достигает, следует изменить систему ограничений.

24. Как спланировать выпуск продукции, чтобы прибыль была наибольшей, если известно, что доход от единицы продукции P_1 равен 7 у. е., доход от единицы продукции P_2 равен 5 у. е.? Данные о расходах сырья каждого вида на единицу продукции и запасе сырья представлены в таблице. Рассчитайте максимальный доход предприятия.

Вид сырья	Расходы на единицу продукции		Запас сырья
	Продукция P_1	Продукция P_2	
1-й	2	3	19
2-й	2	1	13
3-й	0	3	15
4-й	3	0	18

Ответ: 5 единиц продукции P_1, 3 единицы продукции P_2; доход составит 50 у. е.

25. Производство планшетов и телефонов предусматривает основные затраты на труд, сырьё и оборудование, указанные в таблице.

Наименование ресурса	Затраты ресурсов на производство одной единицы продукции		Запасы ресурсов
	Планшет	Телефон	
Труд, ч/ед. продукции	2	4	2000
Сырьё, ед. сырья	4	1	1400
Оборудование, шт.	2	1	800

Прибыль от реализации одной единицы продукции: одного планшета — 40 \$, одного телефона — 60 \$. Определите оптимальный план выпуска, минимизирующий затраты производства, и вычислите минимальные затраты.
Ответ: 200 планшетов и 400 телефонов; минимальные затраты равны 32 000 долларов.

26. Завод выпускает два вида продукции. По плану суточная норма производства составляет не менее 60 шт. 1-го вида и не более 90 шт. 2-го вида. Суточные ресурсы завода: 780 ед. оборудования, 850 ед. сырья, 790 ед. электроэнергии.
Расход ресурсов на 1 шт. представлен в таблице.

Ресурсы	Продукция	
	1-й вид	2-й вид
Электроэнергия, ед. электроэнергии	4	2
Сырьё, ед. сырья	4	5
Оборудование, ед. оборудования	3	4

Цена за одно изделие 1-го вида равна 80 у. е., цена за одно изделие 2-го вида равна 60 у. е.
Рассчитайте, какое количество каждого вида надо выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была наибольшей. Вычислите наибольшую общую стоимость продукции.
Ответ: продукции 1-го вида следует выпустить 195 ед., а продукция 2-го вида нерентабельна; общая стоимость равна 15 600 у. е.

27. Кондитерская фабрика производит продукцию двух видов: конфеты и шоколад. Для производства продукции каждого вида требуются ресурсы двух типов: сахар и какао-бобы. Чтобы получить 1 т шоколада, нужны 1 т сахара и 3 т какао-бобов. Чтобы получить 1 т конфет, нужны 1 т сахара и 1 т какао-бобов. Суточные запасы ресурсов равны 5 и 10 т соответственно. Прибыль от реализации одной тонны шоколада и конфет составляет 5 млн и 3 млн р. соответственно. Составьте математическую модель для нахождения оптимального суточного плана производства, максимизирующего прибыль фабрики.
Ответ: конфет и шоколада надо выпустить по 2,5 т; прибыль составит 20 млн р.

Задание к задачам №28—30. Определите, достигает ли целевая функция заданного (максимального или минимального) значения. При положительном ответе решите задачу ЛП: а) определите оптимальный план (x_1; x_2); б) вычислите значение целевой функции при оптимальном плане. Сформулируйте ответ.

28.
$$f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 11 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: целевая функция достигает максимального значения, равного 18, при оптимальном плане $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

29. а) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $f = 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 \geqslant 3 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 = 7 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $F = 2$; б) $x_1 = 1{,}75$; $x_2 = 1{,}75$; $F = 5{,}25$.

30. а) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geqslant 7 \\ -x_2 \leqslant 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $f = 2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_2 \leqslant 6 \\ -4x_2 \geqslant 7 \\ x_1 = 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: а) целевая функция не достигает минимального значения. (Указание: внимательно проанализируйте чертёж, сделанный к задаче, и выясните, почему получился такой ответ.); б) целевая функция не достигает минимального значения. (Указание: внимательно проанализируйте чертёж, сделанный к задаче, и выясните, почему получился такой ответ.)

31. Вычислите значения параметра t или промежутки его значений, которые он принимает в случае, когда графически оптимальное решение будет совпадать со стороной многоугольника допустимых решений. В каком случае задача не имеет решения?

а) $f = 2x + ty \to \max$

$$\begin{cases} -x + y \leqslant 3 \\ x + 2y \leqslant 12 \\ 3x - y \leqslant 15 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $f = -x + ty \to \max$

$$\begin{cases} -x + y \leqslant 2 \\ x - 2y \leqslant 3 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: а) -5; $-1{,}5$; 0; 2; $1/3$; б) 0; $-1{,}4$.

32. Вычислите значения параметра t или промежутки его значений, при которых задача ЛП неразрешима.

а) $f = 2x + y \to \max$

$$\begin{cases} x - 2y \leqslant 4 \\ x - y \leqslant 6 \\ tx + y \leqslant 3 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

б) $f = x + 2y \to \max$

$$\begin{cases} 2x + y \geqslant 9 \\ x - 3y \leqslant 1 \\ tx - y \leqslant -2 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: а) $-0{,}5$; б) -1.

Решите задачу ЛП: а) найдите оптимальный план $(x_1;\ x_2)$; б) вычислите значение целевой функции при оптимальном плане.

33. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $(4/3;\ 10/3)$, $f = 32/3$.

34. $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 8x_1 + 4x_2 \leqslant 38 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 7{,}5$; $F = 29{,}5$.

35. $f = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: целевая функция не достигает минимума.

36. $f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 20/19$; $x_2 = 45/19$; $F = 235/19$.

37. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 4x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1{,}6$; $x_2 = 0{,}6$; $F = 5$.

38. $f = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2/3$; $x_2 = 2/3$; $F = 8/3$.

39. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $F = 2$.

ЧТО УЗНАЛИ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 2

ЧЕМУ НАУЧИЛИСЬ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 2

1. Формулировать задачи ЛП.
2. Решать задачи ЛП графическим методом.
3. Познакомились с решением задач ЛП в MS Excel.

Глава 3

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ: ИСКУССТВО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

3.1 Понятие временного ряда. Виды рядов и их характеристики. Примеры построения временного ряда

Составлять точные прогнозы — это искусство! Метод ЛП позволяет решать вопросы оптимизации при планировании реальных процессов. Решая задачу ЛП, мы находим ответ на вопрос: «Как спланировать свою работу, чтобы получить наилучший результат?» Иногда необходимо изучить уже сложившуюся ситуацию, чтобы выяснить тенденцию развития и составить прогноз. Для этого собирают статистические данные через определённые промежутки времени и составляют временные ряды.

Временной ряд существенным образом отличается от простой выборки данных. В нём каждое значение имеет своё место.

Приведём примеры.

Пример 1. В таблице указаны данные потребления мяса и рыбы на душу населения по годовым данным с 1991 по 1997 г. (в кг на душу населения в год).

Год	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Мясо	69	60	69	57	55	51	50
Рыба	16	12	12	10	9	9	8

Разбив эту таблицу, получим два временных ряда.

Ряд 1

Год	1	2	3	4	5	6	7
Мясо	69	60	59	57	55	51	50

Ряд 2

Год	1	2	3	4	5	6	7
Рыба	16	12	12	10	9	9	8

Пример 2. Временной ряд обеспечения населения собственными легковыми автомобилями.

Год	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Автомобили, штук на 1000 населения	63,5	68,5	75,7	84,4	93,3	102,8	113,7

Временные ряды состоят из двух элементов:

— периода времени, за который приводятся числовые значения;

— числовых значений того или иного показателя, называемых уровнями временного ряда.

Временные ряды возникают в результате измерения некоторого показателя. Это могут быть как показатели технических систем, так и показатели природных, социальных, экономических и других систем (например, метеорологические данные). Типичными примерами временных рядов являются изменение температуры объекта, изменение пропускной способности сети, интенсивности абонентов в сети и т. д. При анализе таких рядов пытаются определить направление развития (тенденцию, или тренд).

Следует различать ряд интервальный и моментный. *Интервальным рядом* называется ряд, у которого уровни (показатели) взяты за определённый промежуток времени. Это может быть неделя, месяц, квартал, год и т. д. Интервальным рядом может быть, например, объём продукции по месяцам.

Пример 3.

Месяц	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Фонд зарплаты служащих фирмы, тыс. р.	37 000,5	38 000,5	39 000,5	42 000,5

Моментным рядом называется ряд, у которого уровни (показатели) взяты на определённый момент времени (например, число сотрудников на определённую дату).

Пример 4.

Дата	01.01	01.02	01.03	01.04	30.04
Число сотрудников	4500	4100	4300	4800	5000

Итак, временной ряд записывается в общем виде.

Время	1	2	3	...	n
Уровни ряда	x_1	x_2	x_3	...	x_n

Обычно временные интервалы между уровнями берутся одинаковые (сутки, декада, календарный месяц, квартал, год).

За длину временного ряда можно брать количество уровней x_i, входящих в ряд.

Замечания:

1) Уровни интервального ряда есть суммарный итог явления за определённый отрезок времени. Они зависят от продолжительности этого периода времени. Их можно суммировать. Они не содержат повторные значения.

2) Уровни моментного ряда могут повторяться. Например, количество вложений в банк за 2010 г. такое же, как и за 2011 г.

3) При необходимости можно перейти от интервального ряда к моментному, просуммировав значения в интервале.

Анализ временного ряда позволяет сделать прогноз будущих значений. Так можно оценить процесс и принять наиболее эффективное решение.

Скорость и интенсивность развития различных явлений существенно варьируют, что сказывается на структуре соответствующих временных рядов. Для оценки указанных свойств явлений статистика использует ряд взаимосвязанных характеристик временного ряда. Среди них: средние значения, абсолютный прирост, относительный прирост, темп роста.

Расчёт таких характеристик основывается на сопоставлении уровней ряда.

1) Вычисление среднего значения уровня ряда зависит от вида временного ряда.

Для интервального ряда среднее значение вычисляется по формуле среднего арифметического. В примере 3 среднее значение (средний уровень) равно

$$\bar{x} = \frac{37000{,}5 + 38000{,}5 + 39000{,}5 + 42000{,}5}{4} = 39000{,}5.$$

Для моментного ряда среднее значение вычисляется по формуле среднего хронологического. В примере 4 среднее значение равно

$$\bar{x}_{\text{хр}} = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2}}{5-1}$$

$$\bar{x}_{\text{хр}} = \frac{\frac{4500}{2} + 4100 + 4300 + 4800 + \frac{5000}{2}}{5-1} = \frac{2250 + 13\,200 + 2500}{4} = 4487{,}5.$$

Замечание: если в примере 4 для моментного ряда найти среднее арифметическое по стандартной формуле, то получится иной результат (в среднем арифметическом не учитывается хронология показателей):

$$\bar{x} = \frac{4500 + 4100 + 4300 + 4800 + 5000}{5} = \frac{4500 + 13200 + 5000}{5} = 4540.$$

Средние значения уровней временного ряда надёжно характеризуют динамику ряда.

2) Следующей наглядной характеристикой временного ряда является его скорость изменения во времени.

Характеристикой скорости временного ряда является абсолютный прирост.

Абсолютный прирост — разность между двумя уровнями временного ряда. Вычисляют цепные и базисные приросты временного ряда.

Цепные приросты вычисляются по формуле $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где x_{i-1} — уровень периода, предшествующего периоду x_i.

Базисные приросты вычисляются по формуле $\Delta x_i = x_i - x_1$, где x_1 принят за базис (базу), x_i — исследуемый уровень. С базисным уровнем сравнивают все другие уровни.

Используют понятия «базисный абсолютный прирост», «цепной абсолютный прирост».

Рассмотрим общую таблицу базисных и цепных приростов.

	Базисный прирост с базисом x_1	Базисный прирост с базисом x_2	Базисный прирост с базисом x_3	Базисный прирост с базисом x_4	Базисный прирост с базисом x_5	Базисный прирост с базисом x_6	Базисный прирост с базисом x_7	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1								
x_2	$x_2 - x_1$							
x_3	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$						
x_4	$x_4 - x_1$	$x_4 - x_2$	$x_4 - x_3$					
x_5	$x_5 - x_1$	$x_5 - x_2$	$x_5 - x_3$	$x_5 - x_4$				
x_6	$x_6 - x_1$	$x_6 - x_2$	$x_6 - x_3$	$x_6 - x_4$	$x_6 - x_5$			
x_7	$x_7 - x_1$	$x_7 - x_2$	$x_7 - x_3$	$x_7 - x_4$	$x_7 - x_5$	$x_7 - x_6$		
x_8	$x_8 - x_1$	$x_8 - x_2$	$x_8 - x_3$	$x_8 - x_4$	$x_8 - x_5$	$x_8 - x_6$	$x_8 - x_7$	

Жёлтым цветом в таблице выделены цепные приросты. В цепных приростах базис переменный, а в базисных приростах базис постоянный.

Сложим все абсолютные приросты по таблице расчётов:

$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_5 - x_4) + (x_6 - x_5) + (x_7 - x_6) + (x_8 - x_7) = -x_1 + x_8 = x_8 - x_1$ — это общий прирост.

Мы познакомились с абсолютными характеристиками временных рядов. Их расчёт основывается на сопоставлении уровней ряда двумя способами.

1. Каждый уровень ряда сравнивается с одним и тем же предшествующим базисным уровнем, где базисный уровень — начальный уровень ряда или уровень, с которого начинается какой-то новый этап развития. Это сравнение с постоянным базисом. Полученные при этом показатели называются базисными.

2. Каждый уровень временного ряда сравнивается с предшествующим непосредственно ему базисом. Это сравнение с переменным

базисом. Полученные при этом показатели называются цепными, так как они представляют собой как бы звенья цепи, связывающей между собой уровни ряда.

Пример 5. В таблице представлен ряд данных по обеспеченности населения собственными легковыми автомобилями за несколько лет (по РФ).

Годы	Автомобили, шт. на 1000 населения
1991	63,5
1992	68,5
1993	75,7
1994	84,4
1995	93,3
1996	102,8
1997	113,7

Решение:

1) определим уровни ряда $x_1 = 63,5$; $x_2 = 68,5$; $x_3 = 75,7$; $x_4 = 84,4$; $x_5 = 93,3$; $x_6 = 102,8$; $x_7 = 113,7$;

2) число наблюдений $n = 7$;

3) рассчитаем абсолютное среднее значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{63,5 + 68,5 + 75,7 + 84,4 + 93,3 + 102,8 + 113,3}{7} \approx 85,928;$$

4) вычислим среднее хронологическое ряда

$$\bar{x}_{\text{хр}} = \frac{\frac{63,5}{2} + 68,5 + 75,7 + 84,4 + 93,3 + 108,8 + \frac{113,7}{2}}{7 - 1} = 86,55;$$

5) средний абсолютный прирост ряда равен:

$$\bar{\Delta} = \frac{x_n - x_1}{n - 1} = \frac{x_7 - x_1}{7 - 1} = \frac{113,7 - 63,5}{6} \approx 8,37.$$

Таблица базисных и цепных показателей в задаче имеет вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1								
x_2	5 $x_2 - x_1$							
x_3	12,2 $x_3 - x_1$	7,2 $x_3 - x_2$						
x_4	20,9 $x_4 - x_1$	15,9 $x_4 - x_2$	8,7 $x_4 - x_3$					
x_5	29,8 $x_5 - x_1$	24,8 $x_5 - x_2$	17,6 $x_5 - x_3$	8,9 $x_5 - x_4$				
x_6	39,3 $x_6 - x_1$	34,3 $x_6 - x_2$	27,1 $x_6 - x_3$	18,4 $x_6 - x_4$	9,5 $x_6 - x_5$			
x_7	50,2 $x_7 - x_1$	45,2 $x_7 - x_2$	38 $x_7 - x_3$	29,3 $x_7 - x_4$	20,4 $x_7 - x_5$	10,9 $x_7 - x_6$		

Из примера 5 видно, что все абсолютные базисные и абсолютные цепные уровни характеризуют увеличение уровней ряда. Это подтверждает положительную динамику роста обеспеченности населения автомобилями.

ВЫВОД:

Абсолютные цепные и базисные приросты временного ряда характеризуют абсолютный размер увеличения (или уменьшения) уровня ряда x_t за определённый временной интервал и исчисляются как разница уровней ряда.

3) В анализе временных рядов используют относительные характеристики динамики изменений ряда:

1. *Базисный темп роста* определяется отношением двух уровней исследуемого ряда и показывает, во сколько раз уровень x_t больше (меньше) уровня, взятого за базис сравнения (сравнение с постоянным базисом):

$$\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}, \frac{x_5}{x_1}, \frac{x_6}{x_1}, \frac{x_7}{x_1}, \frac{x_8}{x_1}.$$

Так, в п р и м е р е 3 примем за базис x_1 и получим

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{38\,000{,}5}{37\,000{,}5} = 1{,}03; \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{39\,000{,}5}{37\,000{,}5} = 1{,}06; \quad \frac{x_4}{x_1} = \frac{42\,000{,}5}{37\,000{,}5} = 1{,}14.$$

Каждый уровень в данном ряде x_2, x_3 и x_4 превышает базисный уровень x_1 более чем в 1 раз.

В п р и м е р е 4, выбрав также за базис x_1, уровни x_2 и x_3 не превышают базисный уровень x_1, уровни x_4 и x_5 превышают базисный уровень x_1.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4100}{4500} = 0{,}92; \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{4300}{4500} = 0{,}96; \quad \frac{x_4}{x_1} = \frac{4800}{4500} = 1{,}07; \quad \frac{x_5}{x_1} = \frac{5000}{4500} = 1{,}12.$$

2. *Цепной темп роста* определяется отношением исследуемого уровня к переменному базису:

$$\frac{x_2}{x_1}, \ \frac{x_3}{x_2}, \ \frac{x_4}{x_3}, \ \frac{x_5}{x_4}, \ \frac{x_6}{x_5}, \ \frac{x_7}{x_6}, \ \frac{x_8}{x_7}.$$

В п р и м е р е 3 цепной темп роста показывает одинаковые отношения для x_2 и x_3 и увеличение скорости изменения для x_4:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{38\,000{,}5}{37\,000{,}5} = 1{,}03; \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{39\,000{,}5}{38\,000{,}5} = 1{,}03; \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{42\,000{,}5}{39\,000{,}5} = 1{,}08.$$

В п р и м е р е 4 скорость изменения сначала увеличилась, а потом уменьшилась:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4100}{4500} = 0{,}9; \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{4300}{4100} = 1{,}05; \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{4800}{4300} = 1{,}12; \quad \frac{x_5}{x_4} = \frac{5000}{4800} = 1{,}05.$$

Темп роста уровня ряда можно записывать в процентах:

$$\frac{x_i}{x_1} \cdot 100\% \ \text{— базисный темп роста.}$$

В п р и м е р е 5 базисные темпы роста равны:

$$\frac{x_2}{x_1} \cdot 100\% = \frac{68{,}5}{63{,}5} \cdot 100\% = 107{,}87\%,$$

$$\frac{x_3}{x_1} \cdot 100\% = \frac{75{,}7}{63{,}5} \cdot 100\% = 119{,}2\% \ \text{ и т. д.}$$

$$\frac{x_i}{x_{i-1}} \cdot 100\% \ \text{— цепной темп роста.}$$

В примере 5 цепные темпы роста равны:

$$\frac{x_2}{x_1} \cdot 100\% = \frac{68{,}5}{63{,}5} \cdot 100\% = 107{,}87\%,$$

$$\frac{x_3}{x_2} \cdot 100\% = \frac{75{,}7}{68{,}5} \cdot 100\% = 110{,}5\%$$

и т. д.

Анализ временных рядов позволяет специалисту выявить тенденции развития изучаемого явления. Далее ему потребуется составить прогноз на будущее. Для этого необходимо использовать другие методы анализа.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Выясните, какие из таблиц задают временные ряды.

а) Таблица сезонных распродаж.

Млн р.	0,2	0,3	0,5	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,2	0,4
Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

б) Таблица сезонных распродаж.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7
Компьютерная техника, тыс. шт.	6	9	16	25	20	16	8

в) Таблица отчёта страховой компании.

Тип полиса	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Объём реализации	50	21	19	40	35

г) Таблица исследования посещаемости магазина.

Часы работы	9—10	11—12	12—13	13—14
Число покупателей	41	85	127	60

2. Составьте временные ряды: а) одновременных показаний двух термометров, расположенных в разных комнатах вашей квартиры; б) температуры воздуха на улице в течение недели.

3. Имеются данные о производстве и потреблении электроэнергии в РФ (см. таблицу).

Годы	Потребление электроэнергии
1995	840,4
1996	827,7
1997	814,4
1998	809,1
1999	832,1
2000	863,7
2001	875,4
2002	878,4
2003	879,2

Рассчитайте цепные, базисные и средние показатели временного ряда.

4. Вычислите среднее значение по годовым данным ввода в действие квартир с 1991 по 1997 г.

Годы	Тыс. квартир
1991	828
1992	682
1993	682
1994	611
1995	602
1996	482
1997	430

5. Рассчитайте: а) среднее число государственных высших учебных заведений за период с 1994 по 1998 г., если данные их статистического учёта в эти годы таковы: 548, 553, 569, 573, 578; б) средний уровень ряда и темп роста при тех же статистических данных учёта (из пункта *а*).

6. Рассчитайте: а) среднее число негосударственных высших учебных заведений за период с 1994 по 1998 г. по соответствующим данным на начало года: 78, 157, 193, 244, 302; б) средний уровень ряда и средний абсолютный прирост (из пункта *а*).

7. Динамика строительства (в млн $м^2$) жилищно-строительными кооперативами за 1996—2000 гг. характеризуется следующими данными:

1996	1997	1998	1999	2000
2,9	2,4	2,1	1,9	1,8

Определите базисные абсолютные приросты строительства по сравнению с 1996 г.

8. Динамика выпуска продукции на производственном объединении в 1996—2000 гг. характеризуется следующими данными:

1996	1997	1998	1999	2000
21,2	22,4	24,9	28,6	31,6

а) Определите базисные абсолютные приросты строительства по сравнению с 1996 г.
б) Определите цепные абсолютные приросты строительства.

9. Динамика производства тканей в одном из регионов за 1996—2000 гг. характеризуется следующими данными (млн $м^2$):

1996	1997	1998	1999	2000
96,2	102,0	104,0	110,4	117,0

Определите цепные абсолютные приросты выпуска продукции.

10. Изменения ежемесячной величины зарплаты от числа уволившихся за год сотрудников в 5 филиалах фирмы отражены в таблице.

Зарплата за месяц	100	150	200	250	300
Число сотрудников	60	35	20	20	15

Являются ли предложенные в таблице данные временными рядами и почему?

11. Продажа-покупка двух товаров за 5 недель отражена в таблице.

Недели	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
Число подушек	5	8	7	12	14
Число простыней	10	20	25	28	14

Можно ли считать данную таблицу временным рядом?
Можно ли каждую строку таблицы принять за временной ряд?
Можно ли вычислить базисный прирост?
Можно ли вычислить цепной прирост?

12. В таблице задан временной ряд, где указана численность обучающихся в частных общеобразовательных организациях (в тыс. чел.) за 2010—2015 гг.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
74	84	92	95	100	104

а) Вычислите относительные показатели динамики временного ряда.
б) Запишите полученные показания в процентах.

13. В таблице представлены данные по выпуску специалистов из частных образовательных организаций (в тыс. чел.) одного региона за 2010—2015 гг.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
36	34	31	35	33	35

Вычислите темп роста временного ряда.

Указание:

Шаг 1. Выберите уровень временного ряда и примите его за базис сравнения x_0.

Шаг 2. Определите отношение уровней:

базисный темп $\frac{x_t}{x_0}$; цепной темп $\frac{x_t}{x_{t-1}}$.

Шаг 3. Сделайте вывод: на сколько процентов уровень x_t больше либо меньше выбранной базы x_0?

14. В таблице дана численность рабочей силы (в тыс. чел.) по годам.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
36 877	37 063	36 956	36 809	36 700	37 155

Вычислите:
а) средние значения интервального ряда;
б) цепные приросты временного ряда;
в) базисные приросты временного ряда.
Составьте таблицу расчётов базисных и цепных показателей.

15. В таблице дана численность безработных, зарегистрированных на конец года (в тыс. чел.) за 6 лет.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
891	726	593	502	480	535

а) Вычислите средний уровень моментного ряда.
б) Вычислите скорость роста временного ряда.
в) Установите связь между показателями временного ряда, вычисленными с постоянным и переменным базисом.
г) Составьте таблицу расчётов базисных и цепных показателей.

16. Дана таблица, по которой надо вычислить, следуя алгоритму, средние запасы (млн р.) в торговой сети за 4 месяца.

Дата	01.01	01.02	01.03	01.04
Запасы	22,4	23,5	20,8	22,2

Указание:

Шаг 1. Определите число уровней ряда n.

Шаг 2. Запишите уровни ряда y_1, y_2, y_3, y_4.

Шаг 3. Проведите расчёт по формуле среднего хронологического

$$\bar{y}_{\text{хр}} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}}{n - 1}.$$

17. По данным таблицы вычислите средние запасы (млн р.) в торговой сети за 4 месяца.

Дата	01.04	01.05	01.06	01.07
Запасы	22,2	24,6	25,0	26,2

18. По данным таблицы вычислите средние запасы (млн р.) в торговой сети за 7 месяцев.

Дата	01.01	01.02	01.03	01.04	01.05	01.06	01.07
Запасы	22,4	23,5	20,8	22,2	24,6	25,0	26,2

Сравните результаты расчёта в заданиях 16—18. Сделайте вывод.

3.2 Методы анализа временных рядов. Тренд развития

Если вы математик-аналитик, то в вашем рабочем сундуке математических инструментов должен быть целый арсенал методов анализа временных рядов и программирования. Вот только некоторые из них: метод скользящего среднего, метод избранных точек, метод наименьших квадратов.

Метод скользящего среднего

Метод скользящего среднего — один из эмпирических методов для сглаживания и прогнозирования временных рядов. Суть его состоит в том, что абсолютные значения временного ряда меняются на средние арифметические значения за определённые интервалы. Выбор интервалов осуществляется способом скольжения. Первые уровни постепенно исключаются, последующие — включаются. В результате получается сглаженный временной ряд значений, позволяющий чётко проследить тенденцию изменений исследуемого параметра.

Временной ряд — это множество значений t и x, связанных между собой: t — интервалы или моменты времени; x — характеристика исследуемого явления (цена, например действующая в определённый период времени).

С помощью скользящего среднего можно выявить характер изменений значения x во времени и спрогнозировать данный параметр в будущем. Метод работает в том случае, когда для значений чётко прослеживается тенденция в развитии.

Покажем исследование на примере интервального ряда.

Пример 6 (о выпуске продукции).

Задан временной ряд выпуска продукции предприятия за месяц.

Необходимо выполнить сглаживание временного ряда.

Ряд содержит данные о месячном выпуске продукции. Сформируем укрупнённые интервалы. Они состоят из одинакового числа уровней.

Рабочие дни месяца	1	2	3	4	5	6	7	8
Выпуск продукции, млн р.	37 x_1	42 x_2	33 x_3	45 x_4	58 x_5	55 x_6	56 x_7	70 x_8
Рабочие дни месяца	9	10	11	12	13	14	15	16
Выпуск продукции, млн р.	69 x_9	74 x_{10}	71 x_{11}	86 x_{12}	70 x_{13}	92 x_{14}	68 x_{15}	93 x_{16}
Рабочие дни месяца	17	18	19	20	21	22	23	
Выпуск продукции, млн р.	81 x_{17}	89 x_{18}	94 x_{19}	103 x_{20}	109 x_{21}	99 x_{22}	111 x_{23}	

Алгоритм:

Шаг 1. Составим двухдневные суммы и запишем их среднее значение. Получаем скользящее среднее значение по двухдневным суммам.

Шаг 2. Составим трёхдневные суммы и запишем их среднее значение. Получаем скользящее среднее значение по трёхдневным суммам.

Шаг 3. Составим пятидневные суммы и запишем их среднее значение. Получаем скользящее среднее значение по пятидневным суммам.

Шаг 4. Построим график скользящих средних значений полученных сумм.

Возьмём интервал в 3 дня. Тогда первая скользящая сумма будет равна объёму выпуска продукции за первый, второй и третий дни: $x_1 + x_2 + x_3 = 37 + 42 + 33 = 112$; вторая скользящая сумма — за второй, третий и четвёртый дни: $x_2 + x_3 + x_4 = 42 + 33 + 45 = 120$; третья скользящая сумма — $x_3 + x_4 + x_5 = 33 + 45 + 58 = 136$. Далее проводим вычисления подобным образом.

Получена таблица трёхдневных сумм.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
112	120	136	158	169	181	195	213	214	231	227

y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	y_{21}
248	230	253	242	263	264	286	306	311	319

Три дня принимаем за один показатель: $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 37 + 42 + 33 = 112$.

Возьмём интервал в 5 дней. Тогда первая скользящая сумма будет равна объёму выпуска за первый, второй, третий, четвёртый и пятый дни: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 215$. Вторая скользящая сумма будет равна объёму выпуска за второй, третий, четвёртый, пятый и шестой дни: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 233$; $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 247$; $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 284$; $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 308$; $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 324$; $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 324$; $x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 340$; $x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 370$; $x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 370$; $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 393$; $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 387$; $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 404$; $x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 423$; $x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 425$; $x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 460$; $x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} = 476$; $x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} = = 494$; $x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 516$.

Запишем в таблицу расчёт скользящего среднего значения по трёхдневным скользящим суммам (деление на 3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
37,3	40	45,3	52,7	56,3	60,3	65,0	71,0	71,3	77,0	75,7

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
82,7	76,7	84,3	80,7	87,7	88,0	95,3	102	103,7	106,3

Расчёт скользящего среднего значения по пятидневным суммам (деление на 5).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43,0	46,6	49,4	56,8	61,6	64,8	64,0	68,0	74,0	74,0

11	12	13	14	15	16	17	18	19
78,6	77,4	80,8	84,6	85,0	92,0	95,2	98,8	103,2

Строим график скользящих средних значений, демонстрирующий сглаживание временного ряда (рис. 11).

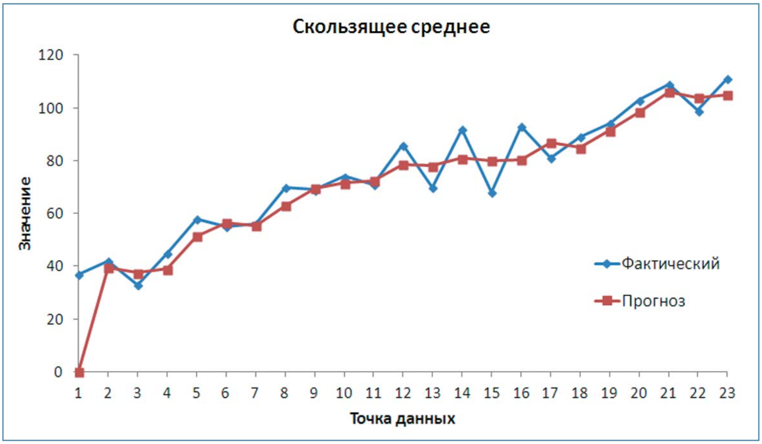


Рис. 11

Вернёмся к примеру 5 из параграфа 3.1. Напомним, что в таблице представлен ряд данных по обеспеченности населения собственными легковыми автомобилями за последние несколько лет (по РФ).

Годы	Автомобили, шт. на 1000 населения
1991	63,5
1992	68,5
1993	75,7
1994	84,4
1995	93,3
1996	102,8
1997	113,7

Определим средние значения и сделаем прогноз на следующий год по алгоритму.

А л г о р и т м:

Шаг 1. Сформируем укрупнённые интервалы. Они состоят из одинакового числа уровней: по два, по три, по пять уровней.

Шаг 2. Метод скользящего среднего значения по два уровня (двухлетние скользящие суммы): $\frac{x_1 + x_2}{2} = 66$; $\frac{x_2 + x_3}{2} = 72{,}1$; $\frac{x_3 + x_4}{2} = 80{,}05$; $\frac{x_4 + x_5}{2} = 88{,}85$; $\frac{x_5 + x_6}{2} = 98{,}05$. Прогноз на 8-й год: $\frac{x_6 + x_7}{2} = 108{,}25$.

Шаг 3. Метод скользящего среднего значения по три уровня (трёхлетние скользящие суммы): $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 69{,}24$; $\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = 76{,}2$; $\frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = 84{,}48$; $\frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} = 93{,}5$. Прогноз на 8-й год: $\frac{x_5 + x_6 + x_7}{3} = 103{,}27$.

Шаг 4. По аналогии составьте пятилетние скользящие суммы. Вычислите их средние значения. Сделайте прогноз.

Шаг 5. Сравним значения прогнозов, полученных на 1999 г.

Шаг 6. Результаты запишем в таблицу анализа. Таблицу средних значений суммы по 5 уровней составьте самостоятельно.

Сумма	132	144,2	160,1	177,7	196,1	216,5
Среднее значение суммы по 2 уровня	66	72,1	80,05	88,85	98,05	108,25 прогноз на 1998 г.

Сумма	207,7	228,6	253,4	280,05	309,8
Среднее значение суммы по 3 уровня	69,24	76,2	84,48	93,5	103,27 прогноз на 1998 г.

Теперь самостоятельно постройте графики скользящих средних значений и получите сглаженный временной ряд. Хорошие прогнозы получаются в том случае, когда данные не имеют скачков.

Проведя анализ обеспеченности населения автомобилями, можно получить представление о загрузке автомобильных дорог в следующем году.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Под политической арифметикой (от греч. *arithmus* — число и *politike* — искусство управлять государством) изначально подразумевалось любое исследование социальных явлений и выражение результатов исследования в количественном отношении. Впоследствии этим словом стали обозначать сбор количественных данных. Эти данные собирали методом массовых наблюдений за социальными явлениями. Первым «политическим арифметиком» был Джон Граунт, автор сочинения «Естественные и политические наблюдения над записями умерших, главным образом по их отношению к управлению, религии, торговле, росту, воздуху, болезням и т. д. гор. Лондона». Эта книга появилась в 1662 г. Труд автора Уильяма Петти с ещё более длинным названием «Политическая арифметика, рассуждение о величине и ценности земель, населения, строений, земледелия, мануфактур, торговли, рыболовства, ремесленников, матросов, солдат, государственных доходов, процентов, налогов, ростовщичества, кораблей, банков, об оценке людей, увеличении числа матросов, о милиции, гаванях, позициях, мореплавании, морском могуществе и т. д., насколько всё это относится ко всем странам вообще и в особенности к территориям его величества короля Великобритании и его соседей — Голландии, Зеландии и Франции» вышел в свет в 1691 г. С появлением этой книги и началась политическая арифметика. Будучи профессиональным врачом, Петти внёс в политическую арифметику элементы медицины.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Применение скользящего среднего

Сделаем анализ временных рядов в MS Excel.

Пример 7. Торговая сеть анализирует данные о продажах книг в книжных магазинах, находящихся в городах с населением менее 100 000 человек. Период наблюдений — 2015 год. Требуется выяснить основную тенденцию развития продаж.

Месяц	1	2	3	4	5	6
Выручка, тыс. р.	10 200	7500	9100	9000	8400	7800
Месяц	7	8	9	10	11	
Выручка, тыс. р.	7600	9200	9400	8700	8900	

Будем решать эту задачу в Пакете анализа программы.

Пакет анализа представляет собой надстройку Excel, которая по умолчанию отключена. Поэтому прежде всего требуется её включить. Как это сделать, смотрите Приложение 1.

Рассмотрим, как непосредственно можно использовать возможности пакета **Анализ данных** для работы по методу скользящего среднего. Давайте на основе информации о доходе фирмы за 11 предыдущих месяцев составим прогноз на двенадцатый месяц. Для этого внесём данные из условия в таблицу программы и воспользуемся инструментами **Пакета анализа.**

1. Переходим во вкладку **«Данные»** и жмём на кнопку **«Анализ данных»** на ленте инструментов в блоке **«Анализ»** (рис. 12).

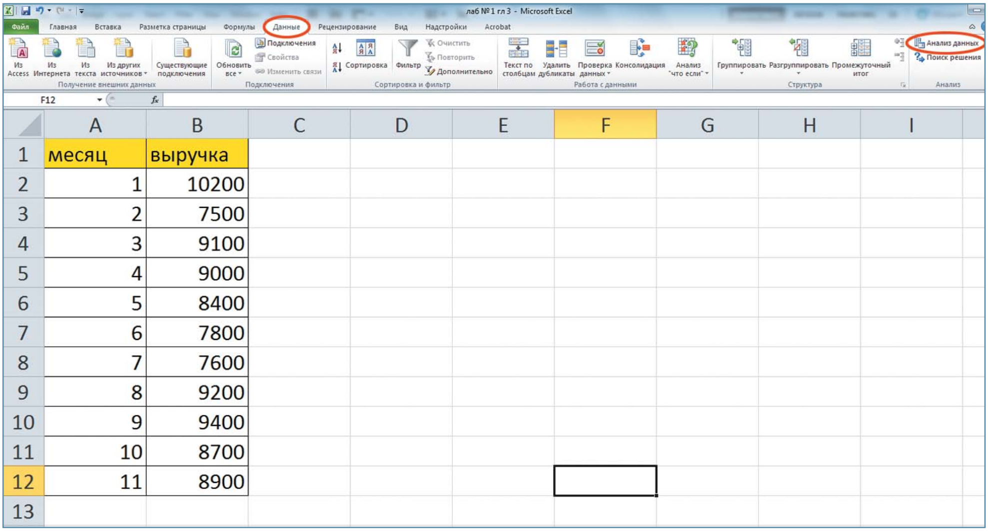


Рис. 12

2. Открывается перечень инструментов, которые доступны в **Пакете анализа.** Выбираем из них наименование **«Скользящее среднее»** и жмём на кнопку **«ОК»** (рис. 13).

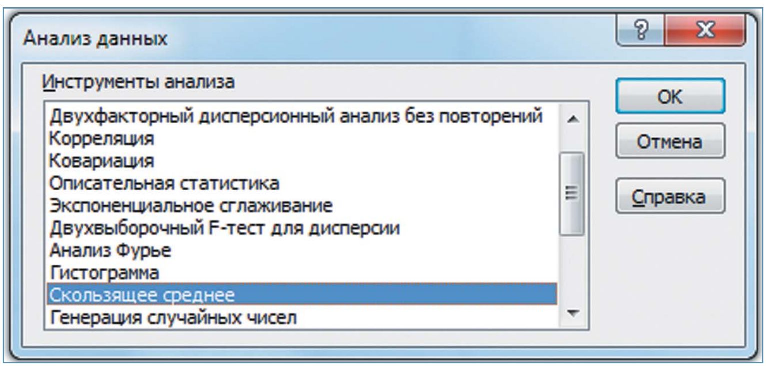


Рис. 13

3. Запускается окно ввода данных для прогнозирования методом скользящего среднего (рис. 14).

В поле **«Входной интервал»** указываем адрес диапазона, в котором расположена помесячно сумма выручки без ячейки вывода данных.

В поле **«Интервал»** следует указать интервал обработки значений методом сглаживания. Для начала установим значение сглаживания в три месяца, поэтому вписываем цифру **3.**

В поле **«Выходной интервал»** нужно указать произвольный пустой диапазон на листе, куда будут выводиться данные после их обработки. Диапазон должен быть на одну ячейку больше входного интервала.

Также следует установить галочку около параметра **«Стандартные погрешности»**. При необходимости можно также установить галочку около параметра **«Вывод графика»** для визуальной демонстрации, в нашем случае это делать не обязательно. После того как все настройки внесены, жмём на кнопку «**ОК**».

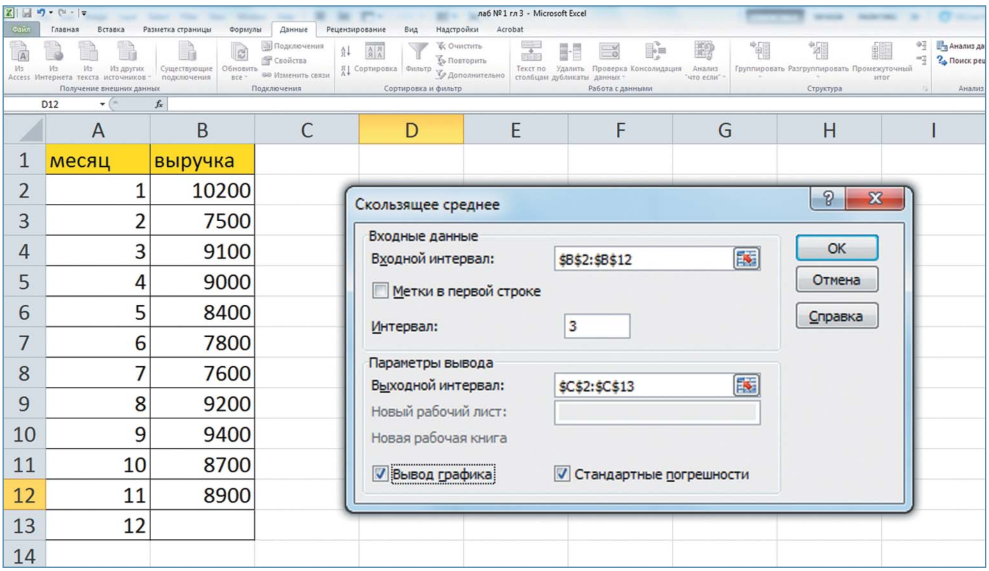


Рис. 14

4. Программа выводит результат обработки (рис. 15).

5. Теперь выполним сглаживание за период в два месяца, чтобы определить, какой результат является более корректным. Для этих целей снова запускаем инструмент **«Скользящее среднее» Пакета анализа** (рис. 16).

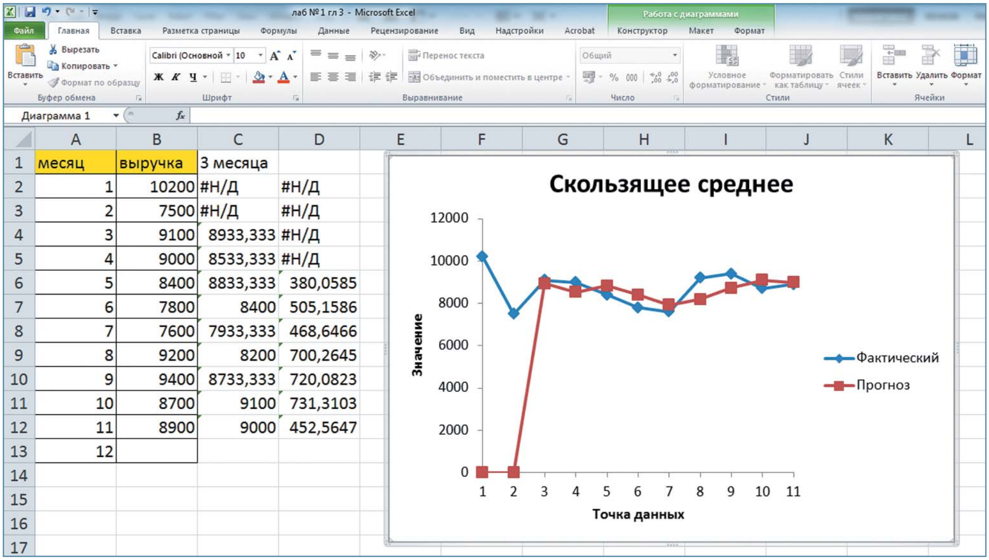

лаб №1 гл 3 - Microsoft Excel
Работа с диаграммами
Файл
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Надстройки
Acrobat
Конструктор
Макет
Формат
Диаграмма 1
месяц
выручка
3 месяца
1 10200 #Н/Д #Н/Д
2 7500 #Н/Д #Н/Д
3 9100 8933,333 #Н/Д
4 9000 8533,333 #Н/Д
5 8400 8833,333 380,0585
6 7800 8400 505,1586
7 7600 7933,333 468,6466
8 9200 8200 700,2645
9 9400 8733,333 720,0823
10 8700 9100 731,3103
11 8900 9000 452,5647
12
Скользящее среднее
Значение
Точка данных
Фактический
Прогноз

Рис. 15

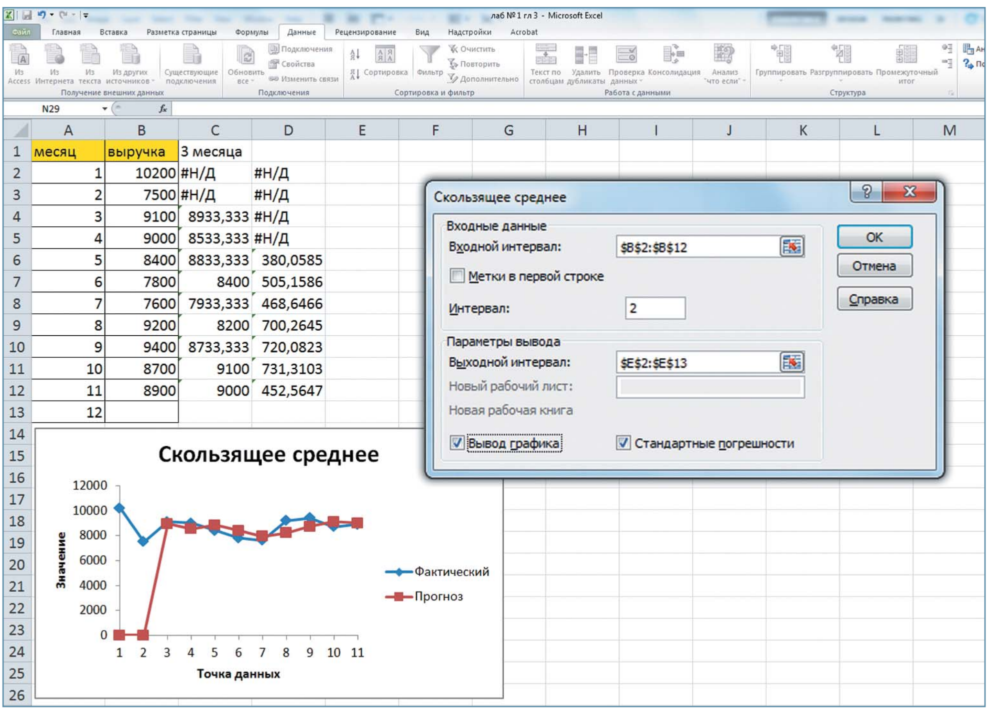

лаб №1 гл 3 - Microsoft Excel
Файл
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Надстройки
Acrobat
N29
месяц
выручка
3 месяца
1 10200 #Н/Д #Н/Д
2 7500 #Н/Д #Н/Д
3 9100 8933,333 #Н/Д
4 9000 8533,333 #Н/Д
5 8400 8833,333 380,0585
6 7800 8400 505,1586
7 7600 7933,333 468,6466
8 9200 8200 700,2645
9 9400 8733,333 720,0823
10 8700 9100 731,3103
11 8900 9000 452,5647
12
Скользящее среднее
Входные данные
Входной интервал: $B$2:$B$12
Метки в первой строке
Интервал: 2
Параметры вывода
Выходной интервал: $E$2:$E$13
Новый рабочий лист:
Новая рабочая книга
Вывод графика
Стандартные погрешности
ОК
Отмена
Справка
Скользящее среднее
Значение
Точка данных
Фактический
Прогноз

Рис. 16

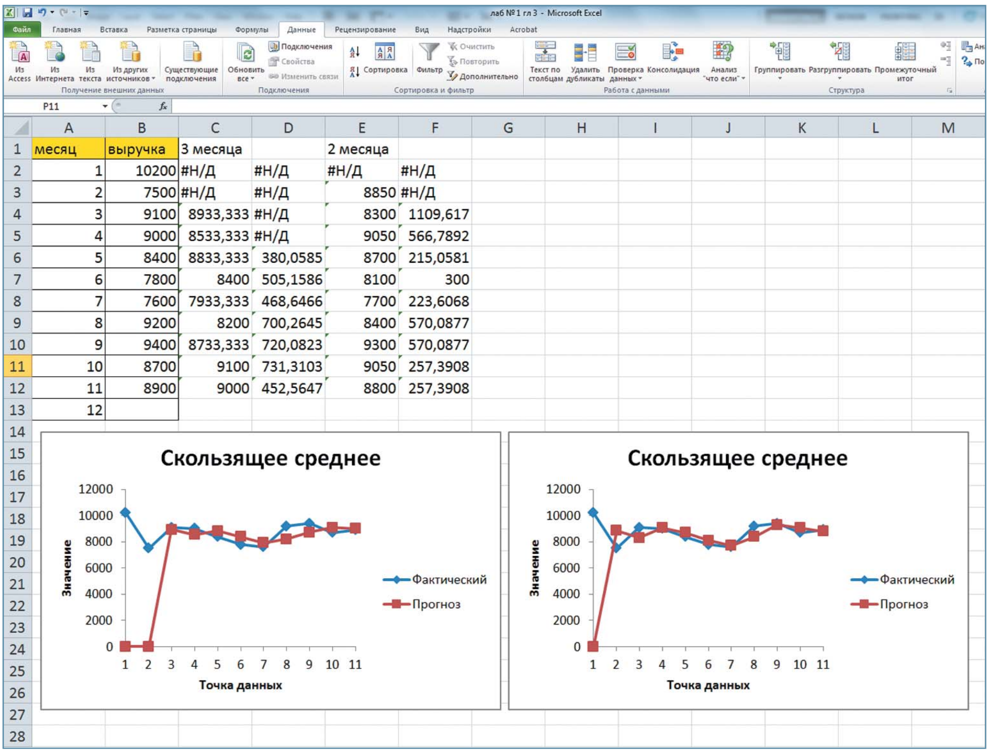
В поле **«Входной интервал»** оставляем те же значения, что и в предыдущем случае.

В поле **«Интервал»** ставим цифру **2**.

В поле **«Выходной интервал»** указываем адрес нового пустого диапазона, который также должен быть на одну ячейку больше выходного интервала.

Остальные настройки оставляем прежними. После этого жмём на кнопку **«ОК»**.

6. Вслед за этим программа производит расчёт и выводит результат на экран (рис. 17). Для того чтобы определить, какая из двух моделей более точная, нам нужно сравнить стандартные погрешности. Чем меньше данный показатель, тем выше вероятность точности полученного результата. Как видим, по всем значениям стандартная погрешность при расчёте скользящей за два месяца меньше, чем аналогичный показатель за три месяца. Таким образом, прогнозируемым значением на декабрь можно считать ве-



	A	B	C	D	E	F
1	месяц	выручка	3 месяца		2 месяца	
2	1	10200	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д	#Н/Д
3	2	7500	#Н/Д	#Н/Д	8850	#Н/Д
4	3	9100	8933,333	#Н/Д	8300	1109,617
5	4	9000	8533,333	#Н/Д	9050	566,7892
6	5	8400	8833,333	380,0585	8700	215,0581
7	6	7800	8400	505,1586	8100	300
8	7	7600	7933,333	468,6466	7700	223,6068
9	8	9200	8200	700,2645	8400	570,0877
10	9	9400	8733,333	720,0823	9300	570,0877
11	10	8700	9100	731,3103	9050	257,3908
12	11	8900	9000	452,5647	8800	257,3908
13	12					

Рис. 17

личину, рассчитанную методом скольжения за последний период. В нашем случае это значение 8800 тыс. р.

Метод избранных точек

Следующим методом исследования временного ряда является *метод избранных точек*. Его применяют в том случае, когда сглаживание ряда методом скользящих средних не позволяет чётко выявить тенденцию развития. В результате применения этого метода выясняется направление развития и строится тренд.

Тренд — это функция от времени, определяющая основное направление развития показателя. Тренд выражается любой элементарной функцией.

Рассмотрим некоторые методы расчёта коэффициентов функции, представляющей тренд.

Этот метод состоит в решении системы уравнений по известным данным уровней временного ряда и применяют его в условиях недостаточности данных.

Пример 8. Известны следующие данные о производстве готовой продукции на фирме (показания за 2006, 2007 и 2009 гг. утеряны).

Год	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Период	1	...	...	4	...	6
Готовая продукция фирмы, млн р.	18	...	...	22	...	28

Необходимо рассчитать тренд временного ряда.

Решение:

<u>*Линейная модель.*</u> Нужно взять две точки: предположительно конечный и начальный уровни: (1; 18) и (6; 28).

Через две точки можно построить одну и только одну прямую: $y = a_1t + a_0$. Здесь a_1 соответствует абсолютному приросту, a_0 — начальному значению при $t = 0$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_0 = 18 \\ a_1 \cdot 6 + a_0 = 28. \end{cases}$$

Решением системы является $a_1 = 2$; $a_0 = 16$.

Уравнение тренда имеет вид $y = 2t + 16$.

Абсолютный прирост — 2 млн р.

Квадратичная модель. Нужно взять три уровня и рассчитать коэффициент параболы: $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$. В этом случае следует взять все три точки: например, 2005, 2008 и 2010 гг.: (1; 18), (4; 22) и (6; 28).

Составим систему трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 + a_0 = 18 \\ 16 \cdot a_2 + 4 \cdot a_1 + a_0 = 22 \\ 36 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 + a_0 = 28. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a_2 = 0{,}3$; $a_1 = 0{,}3$; $a_0 = 18$. Следовательно, тренд будет иметь вид $y = 0{,}3t^2 + 0{,}3t + 18$.

Итак, мы получили две приближённые модели динамики данного временного ряда.

Замечание: отрицательным моментом в таком моделировании тренда служат разные числовые значения параметров a_0, a_1, a_2 в одних и тех же точках построения модели.

Пример 9. Для заданного временного ряда необходимо рассчитать тренд временного ряда (данные за 2001, 2002, 2004, 2005 гг. утеряны).

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Период	1	...	...	4	...	...	7
Готовая продукция фирмы, млн р.	10	...	...	11	...	...	7

Решение:

Линейная модель. Берём две точки, соответствующие конечному и начальному уровню (1; 10) и (7; 7).

Запишем уравнение прямой

$$y(t) = a_0 + a_1t.$$

Решим систему

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_0 = 10 \\ a_1 \cdot 7 + a_0 = 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_0 = 10 \\ 6 \cdot a_1 = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -0{,}5 \\ a_0 = 10{,}5, \end{cases}$$

$a_1 = -0{,}5$ соответствует абсолютному приросту (тенденция к убыванию).

Тренд будет иметь вид $y(t) = -0{,}5t + 10{,}5$.

Квадратичная модель. Рассмотрим развитие по параболе:

$$y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2.$$

Берём три точки (1; 10), (4; 11), (7; 7).
Решим систему

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 10 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 11 \\ a_0 + 7a_1 + 49a_2 = 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 1{,}34 \\ a_1 = 1{,}59 \\ a_2 = -0{,}25. \end{cases}$$

Тренд будет иметь вид $y(t) = -0{,}25t^2 + 1{,}59t + 1{,}34$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Задан временной ряд заболеваемости населения РФ по основным классам болезней (в тыс. чел.) за 2010—2015 гг.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
111 428	113 922	113 688	114 721	114 989	113 927

Выполните сглаживание временного ряда методом скользящего среднего. Выполните прогноз на 2016, 2017 и 2018 гг.

2. Задан временной ряд заболеваемости населения РФ по болезням органов дыхания (в тыс. чел., зарегистрированных с диагнозом, установленным впервые в жизни) за 2010—2015 гг.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
46 281	48 437	47 381	48 568	48 708	49 464

Определите:
а) средний абсолютный прирост;
б) средние темпы роста и прироста;
в) средний уровень ряда;
г) линейное уравнение тренда методом избранных точек. Сделайте прогноз на 2018 г.

3. Для временного ряда потребления мяса на душу населения по годам с 1991 по 1997 г. (в кг на душу населения в год) выполните точечный прогноз на основе построения трендовой модели.

1991	1992	1993	1994	1995	1996
69	60	69	57	55	51

Выполните аналогичный прогноз потребления рыбы (в кг на душу населения в год).

1991	1992	1993	1994	1995	1996
16	12	12	10	9	8

4. Определите тренд ряда.

Дата	01.01	01.02	01.03	01.04	01.05	01.06
Число работников	35	30	28	25	30	32

5. Вычислите средний абсолютный прирост временного ряда числа вечерних общеобразовательных организаций (в тыс.) за 2010—2015 гг.

2010	2011	2012	2013	2014	2015
1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,7

Составьте линейную трендовую модель методом избранных точек. Сделайте прогноз на 2018 г.

6. Проделайте сглаживание временных рядов методом скользящего среднего.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t	85	81	78	72	69	70	64	61	56

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

7. Дан временной ряд. Определите вид ряда. Вычислите среднее значение уровня ряда. Объясните, что такое среднее хронологическое моментного ряда и почему оно может отличаться от среднего арифметического.

Год	Выпуск продукции, ед.	Год	Выпуск продукции, ед.	Год	Выпуск продукции, ед.
1986	25	1990	30	1994	40
1987	27	1991	35	1995	42
1988	30	1992	33	1996	45
1989	29	1993	40	1997	44
Сумма	111		138		171

3.3 Метод наименьших квадратов

Напомним: если во временном ряду появляется закономерность в изменении показателя уровня, то говорят, что имеет место **тренд**. Тренд — это общее направление развития показателя.

На графике тренда по оси абсцисс отложена шкала времени t, по оси ординат отложена шкала уровней ряда x_t. Он показывает направление роста показателя.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Изначально метод наименьших квадратов появился как способ приближённого решения систем линейных уравнений. Карлу Фридриху Гауссу принадлежит первое применение метода наименьших квадратов. В 1820 г. ему было поручено произвести геодезическую съёмку Ганновера. Для этого он разработал методику применения открытого ранее метода наименьших квадратов и организовал съёмку местности и составление карт. Но Гаусс, как и Ньютон, не публиковал свои открытия до тех пор, пока они не были доведены до совершенства, по его мнению. Первое описание метода наименьших квадратов появилось ещё в 1805 г. в мемуаре Адриена Мари Лежандра «Новый способ определения орбит комет», но не такое полное, как у Гаусса. Пьер-Симон Лаплас связал метод с теорией вероятностей. В начале XX в. Андрей Андреевич Марков включил метод наименьших квадратов в теорию оценивания математической статистики, в которой он является важной частью.

Построение трендовой модели методом наименьших квадратов

Приведём пример. Допустим, вы имеете временной ряд. Он задан тремя точками.

t	1	2	3
x	3	5	6

Поставлена задача найти значения a и b в уравнении $x = at + b$ прямой линии, ближе всего располагающейся к точкам (1; 3), (2; 5), (3; 6).

Это уравнение прямой и называется линейным трендом. Метод наименьших квадратов заключается в выборе таких коэффициентов a и b, которые обеспечивают наименьшее значение суммы

$$(x_1 - (a \cdot t_1 + b))^2 + (x_2 - (a \cdot t_2 + b))^2 + (x_3 - (a \cdot t_3 + b))^2.$$

Чем меньше эта сумма, тем ближе прямая проходит к эмпирическим данным на графике.

Математики доказали, что минимум будет обязательно существовать при значениях a и b, которые являются решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a\left(t_1 + t_2 + t_3\right) + b \cdot 3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ a\left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right) + b \cdot \left(t_1 + t_2 + t_3\right) = x_1t_1 + x_2t_2 + x_3t_3. \end{cases}$$

Здесь:

сумма $t_1 + t_2 + t_3 = 6$; среднее значение $\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = 2$,

сумма $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 14$; среднее значение $\frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3} = 1{,}6667$.

Система имеет вид

$$\begin{cases} a \cdot 6 + 3 \cdot b = 14 \\ a \cdot 14 + 6 \cdot b = 31. \end{cases}$$

Решая систему, находим $b = 1{,}6667$ и $a = 1{,}5$.

Запишем уравнение тренда $x = 1{,}5t + 1{,}6667$ и построим прямую, которая менее всего отклоняется от множества точек, заданных временным рядом.

Полученную модель можно истолковать следующим образом: коэффициент при t (коэффициент наклона) показывает, что если t увеличивается на одну единицу, то x возрастает на 1,5.

Расчёт прогноза проводится подстановкой чисел t, равных 4, 5 или 6, в полученную формулу тренда $x = 1{,}5t + 1{,}6667$:

$$x(4) = 7{,}67;\ x(5) = 9{,}15;\ x(6) = 10{,}67.$$

Приведённые приёмы прогнозирования — эмпирические. Они важны на начальных этапах исследования и анализа. На их основе возникают предпосылки для применения более строгих методов компьютерного моделирования.

Различные виды трендовых моделей для аналитического выравнивания:

Виды трендовых моделей	
Линейная	$x(t) = at + b$
Квадратичная	$x(t) = at^2 + bt + c$
Обратной пропорциональности	$x(t) = b + a\frac{1}{t}$

ФОРМУЛЫ РАСЧЁТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ:

1) Расчёт коэффициентов линейной модели $x = at + b$:

$$\begin{cases} b + a\overline{t} = \overline{x} \\ b\overline{t} + a\overline{t^2} = \overline{tx}. \end{cases},$$

где $\overline{x}$, $\overline{t}$, $\overline{t^2}$, $\overline{tx}$, $\overline{t^2}$ и т. д. — средние значения.

2) Расчёт коэффициентов квадратичной модели $x = at^2 + bt + c$:

$$\begin{cases} c + b\overline{t} + a\overline{t^2} = \overline{x} \\ c\overline{t} + b\overline{t^2} + a\overline{t^3} = \overline{xt} \\ c\overline{t^2} + b\overline{t^3} + a\overline{t^4} = \overline{xt^2}. \end{cases}$$

3) Расчёт коэффициентов модели обратной пропорциональности $x = b + a\frac{1}{t}$:

$$\begin{cases} b + a\overline{\frac{1}{t}} = \overline{x} \\ b\overline{\frac{1}{t}} + a\overline{\frac{1}{t^2}} = \overline{\frac{x}{t}}. \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Ряды наблюдений имеют следующий вид (см. таблицу):

Номер точки	1	2	3	4	5	6
x	72,1	70,8	68,5	66,4	65,9	64,6
y	3,6	4,2	5,5	6,4	7,3	8,2

Определите линейный тренд: а) временного ряда $x(t)$; б) временного ряда $y(t)$.

Ответ: а) $x(t) = -1{,}551t + 73{,}48$; б) $y(t) = 0{,}949t + 2{,}547$.

2. Даны два временных ряда за 2011—2018 гг.

а)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Объём продукции	119	117	117	118	119	122	127	132

б)

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Цены на продукцию	341	304	272	244	221	202	187	178

Сделайте прогноз на 2019 г.

Ответ: а) $x(2019) = 130$; б) $x(2019) = 211{,}068$.

3. Определите тенденцию роста (тренд) динамики урожайности зерновых культур фермерского хозяйства за 15 лет. Сделайте прогноз на 2018 г.

Год	2006	2007	2008	2009	2010
Урожайность, ц/га	13,7	12,1	14,0	13,2	15,6
Год	2011	2012	2013	2014	2015
Урожайность, ц/га	15,4	14,0	17,6	15,4	10,9

Ответ: $y(t) = 0{,}11t + 13{,}587$.

Указание к заданиям 4—7: отметьте в прямоугольной системе координат все точки (t; x) из таблицы к заданию. Получится облако точек. Рассчитайте коэффициенты линейного тренда. Постройте график тренда. Критерием правильности расчётов будет прохождение линии тренда через облако точек.

4. Постройте линейный тренд дневной выработки, выполняемой сотрудником, от стажа работы. Сделайте прогнозы на 2 шага вперёд.

Стаж работы, лет	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Дневная выработка, шт.	4	5	6	7	7	8	8	9	10	9

Ответ: линия тренда $x(t) = 0{,}6t + 4$; прогнозы: 11,2; 11,8.

5. Постройте линейный тренд временного ряда, заданного значениями экспериментальных данных в химическом опыте, в течение 10 с:

t	1	2	3	4	5
Давление поршня	1,91	2,76	2,67	4,03	4,12
t	6	7	8	9	10
Давление поршня	2,81	6,53	6,24	9,03	6,87

6. Постройте параболический тренд следующего ряда:

t	1	2	3	4	5	6	7
x	1,22	1,29	1,6	1,54	2	1,63	1,38
t	8	9	10	11	12	13	
x	1,83	1,82	1,69	1,67	1,9	5,6	

7. Определите и постройте линейный тренд заданного временного ряда.

t	1	4	7	11	15	17	22
y	3	6	10	14	18	24	30

Ответ: $y = 0{,}876 + 1{,}284t$.

8. Выполните анализ заданного временного ряда. Вычислите:
1) средний абсолютный темп роста ряда;
2) средний абсолютный прирост ряда.

Год	1993	1994	1995	1996	1997	1999	2001	2003
Затраты на выпуск продукции	385	389	390	392	415	416	506	745

Ответ: 1) 193,5%; 2) 51,4.

9. Вычислите тренд обратной пропорциональности заданного временного ряда.

t	1	3	4	6	7	9	10
y_t	14	11	11	9	8	7	5

Ответ: $y_t = 9{,}02 + \frac{0{,}71}{t}$.

10. Вычислите квадратичный тренд заданного временного ряда.

t	1	2	3	4	5	7	10	14	17	23
y_t	1	3	6	7	8	11	16	21	27	39

Ответ: $y(t) = 0{,}2841t^2 + 0{,}8341t + 2{,}25$.

11. Для временного ряда численности безработных по годам постройте трендовую линейную модель методом наименьших квадратов. Сделайте прогноз на следующую пятилетку.

1	2	3	4	5
3,6 млн чел.	4,2 млн чел.	5,5 млн чел.	6,4 млн чел.	7,3 млн чел.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Построение линейного тренда методом наименьших квадратов в MS Excel

Вернёмся к вопросу о продаже книг, взяв за объём продаж число, рассчитанное методом скользящего среднего.

1	2	3	4	5	6
10 200	7500	9100	9000	8400	7800
7	8	9	10	11	12
7600	9200	9400	8700	8900	8800

Выберем и построим линейный тренд. Построим графики табличной и подобранной аналитической зависимости.

Алгоритм:

Шаг 1. Ввод исходных данных.

Шаг 2. Построение точечного графика.

Шаг 3. Добавление к этому графику линии тренда.

Рассмотрим каждый шаг подробно. Введём исходные данные в рабочий лист и построим график экспериментальных данных (рис. 18).

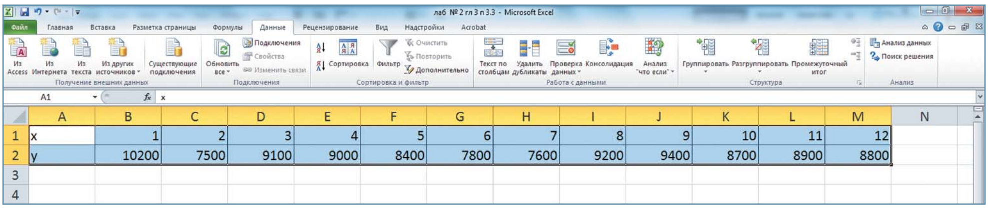


Рис. 18

Далее выделим экспериментальные точки на графике (рис. 19).

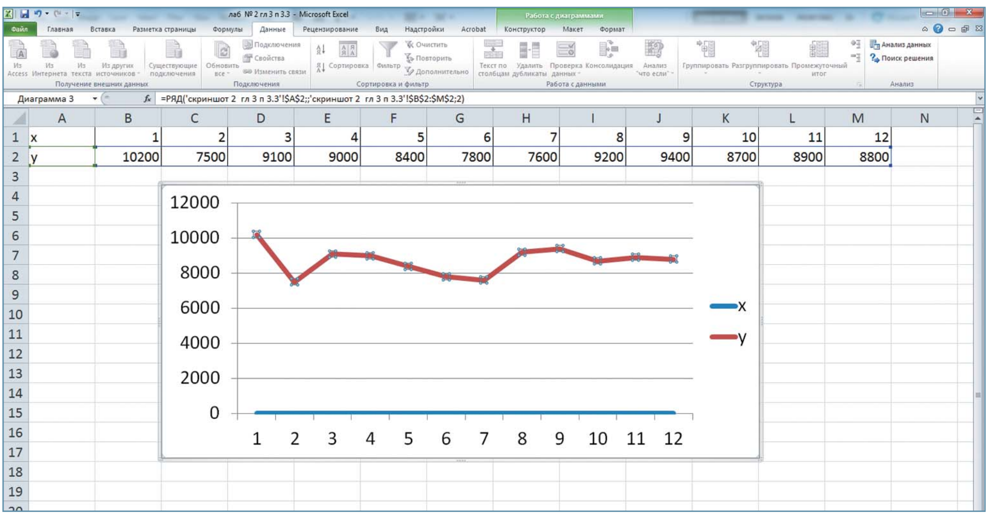


Рис. 19

Щёлкнем правой кнопкой мыши и воспользуемся командой «Добавить линию тренда». Появившееся диалоговое окно позволяет построить функциональную зависимость (рис. 20).

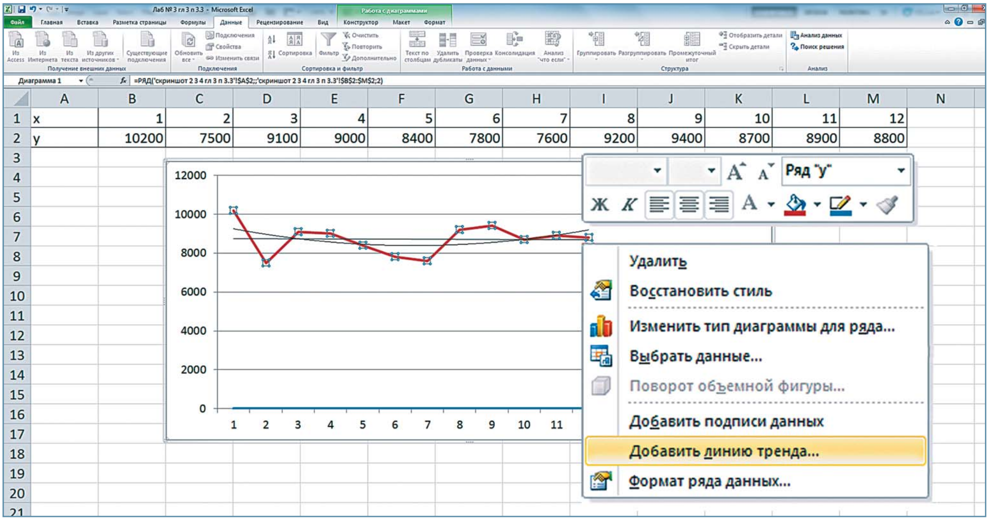


Рис. 20

На первой вкладке (рис. 21) этого окна указан вид функциональной зависимости.

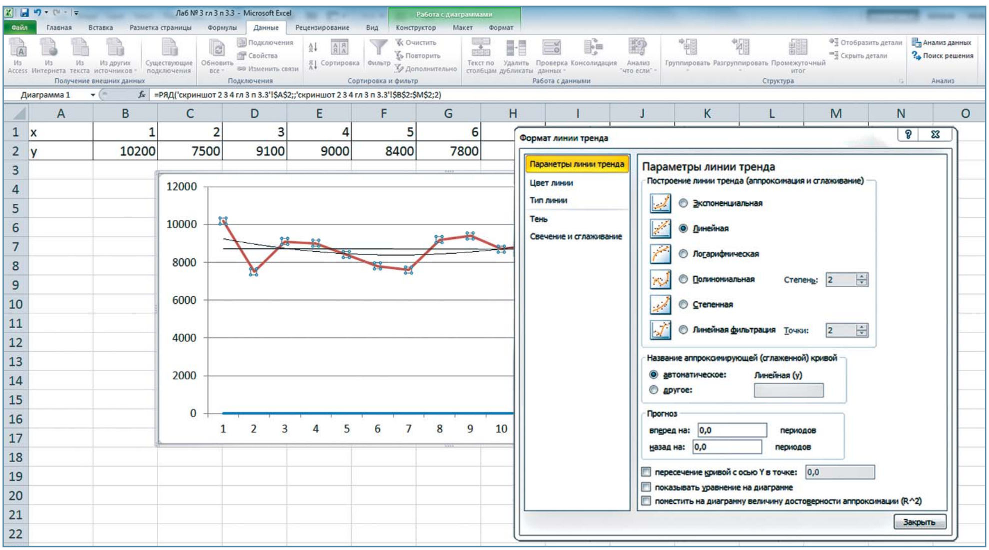


Рис. 21

На второй вкладке (рис. 21) определяются параметры построения:

— название функциональной зависимости;

— прогноз вперёд (назад) на *n* единиц (этот параметр определяет, на какое количество единиц вперёд (назад) необходимо продлить линию тренда);

— показывать ли точку пересечения кривой с прямой $y = \mathrm{const}$;

— показывать ли уравнение на диаграмме;

— помещать ли на диаграмму величину среднеквадратичного отклонения (параметр поместить на диаграмму величины достоверности аппроксимации).

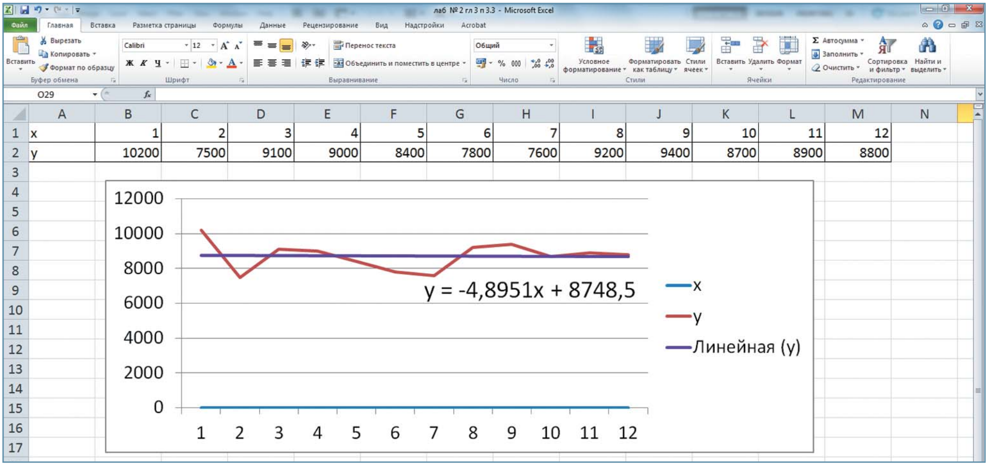


Рис. 22

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 2

Варианты:

1. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, об изменении пропускной способности Сети (в байт/с) в зависимости от числа абонентов (см. таблицу).

2. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, об изменении пропускной способности Сети (в байт/с) и загрузки Сети конфликтами (в байт) (см. таблицу).

3. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, о динамике загрузки Сети конфликтами (в байт) и времени восстановления Сети после конфликта (в с) (см. таблицу).

4. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при

замерах через каждые полчаса, о динамике загрузки Сети конфликтами (в байт) и интенсивности абонентов (в байт/с) (см. таблицу).

5. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, об изменении пропускной способности Сети (в байт/с) и интенсивности абонентов (в байт/с) (см. таблицу).

6. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, об изменении пропускной способности Сети (в байт/с) и времени восстановления Сети после конфликта (в с) (см. таблицу).

7. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, о динамике интенсивности абонентов (в байт/с) и загрузке Сети данными (в байт) (см. таблицу).

8. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, о динамике интенсивности абонентов (в байт/с) и времени восстановления Сети после конфликта (в с) (см. таблицу).

9. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, о динамике загрузки Сети данными (в байт) и времени восстановления Сети после конфликта (в с) (см. таблицу).

10. Постройте линейный тренд и получите прогнозные значения на несколько шагов вперёд (2—4 шага). Имеются данные, полученные при замерах через каждые полчаса, о динамике загрузки Сети данными (в байт) и пропускной способности Сети (в байт/с) (см. таблицу).

t	Пропускная способность Сети, байт/с	Число абонентов	Загрузка Сети конфликтами, байты	Время восстановления Сети после конфликта, с	Интенсивность абонентов, байт/с	Загрузка Сети данными, байты
1	68	11 250 000	0,00000091	0,00002	5000	0,028564
2	68	10 750 000	0,000000205	0,000023	6000	0,035872
3	60	10 000 000	0,000000369	0,000025	6800	0,038562
4	63	10 625 000	0,000000136	0,000021	6100	0,032558
5	67	11 000 000	0,000000132	0,00002	5600	0,031757
6	66	10 000 000	0,00000054	0,000025	6800	0,042418
7	66	9 500 000	0,000001202	0,00003	7400	0,048591

Задания для лабораторной работы № 3

Постройте квадратичный тренд и сделайте прогнозы на 2—4 шага вперёд. Данные те же, что и для лабораторной работы № 2 (1—10).

Задания для лабораторной работы № 4

Постройте тренд обратной пропорциональности и сделайте прогнозы на 2—4 шага вперёд. Данные те же, что и для лабораторной работы № 2 (1—10).

ЧТО УЗНАЛИ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 3

ЧЕМУ НАУЧИЛИСЬ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 3

1. Выделять временные ряды из предложенных числовых данных.
2. Анализировать временные ряды с помощью средних значений.
3. Строить трендовые модели.

Глава

4

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ: ТАКТИКА И СТРАТЕГИЯ УСПЕХА

4.1 Применение математического анализа и геометрии в экономике

О спросе и предложении

В начале книги предлагалось решить задачу о вычислении доходов ресторана от проведения акции «Бизнес-ланч». Модель вычисления прибыли в этой задаче статичная, в ней не учитывается фактор времени. Но такие модели тоже интересны. Составляя их, математик-аналитик легко может рассчитать значение нужного экономического фактора и сравнить его с фактическим значением. Эта информация важна в деле управления. В этих моделях работают всё те же хорошо известные вам уравнения, неравенства, их системы, различные элементарные функции. Разница лишь в том, что каждый элемент той или иной формулы несёт в себе особый экономический смысл.

Вернёмся к таким моделям. С различными экономическими терминами будем знакомиться попутно при решении задач.

Наверное, вы заметили, что продавец, у которого вы только что приобрели товар в его торговой точке, немедленно фиксирует этот факт. Эта информация ему нужна, чтобы в дальнейшем отследить спрос на этот товар. Вы можете помочь ему в этом: рассчитать функцию спроса и функцию предложения и определить точку безубыточности. Для вычисления будем считать, что зависимость цены от количества товара линейна (хотя в реальной действительности всякий экономист скажет вам, что это не всегда так): $p = kx + b$, где p — цена товара, x — количество товара.

Зависимость цены от количества купленного товара называется *функцией спроса*.

Зависимость цены от количества товара, выставленного на продажу, называется *функцией предложения*.

Представим функцию предложения линейной, тогда её график проходит через две известные точки. Наглядно можно рассмотреть пример покупки лекарств в аптеке. Допустим, вы покупаете таблетки от головной боли.

x_1 — количество товара от первого поставщика, выставленное на продажу по цене p_1 : $x_1 = 100$ шт., $p_1 = 35$ р.;

x_2 — количество товара от второго поставщика, выставленное на продажу по цене p_2 : $x_2 = 50$ шт., $p_2 = 15$ р.

Составим систему уравнений и решим её:

$$\begin{cases} 35 = 100k + b \\ 15 = 50k + b, \end{cases}$$

$k = 0{,}4$; $b = -5$; $p = 0{,}4x - 5$.

Функция предложения всегда возрастающая, так как предложение должно опережать спрос, иначе появится дефицит товара (величина предложения возрастает при увеличении цены товара).

Но таблетки по 35 р. были проданы в количестве 10 шт., а таблетки по 15 р. были проданы все. Тогда, составив систему уравнений и решив её, найдём закон спроса:

$$\begin{cases} 35 = 10k + b \\ 15 = 50k + b, \end{cases}$$

$k = -0{,}5$; $b = 40$; $p = -0{,}5x + 40$.

Функция спроса всегда убывающая, так как имеет место насыщение рынка (величина спроса уменьшается при уменьшении цены товара).

Итак, аптека терпит убытки вследствие того, что цена товара была разработана неправильно. Как исправить данную ситуацию? Построим графики функций спроса и предложения (рис. 23).

Для построения возьмём точки пересечения с осями.

Функция спроса: $p = -0{,}5x + 40$.

p	40	0
x	0	80

Функция предложения: $p = 0{,}4x - 5$.

p	–5	0
x	0	12,5

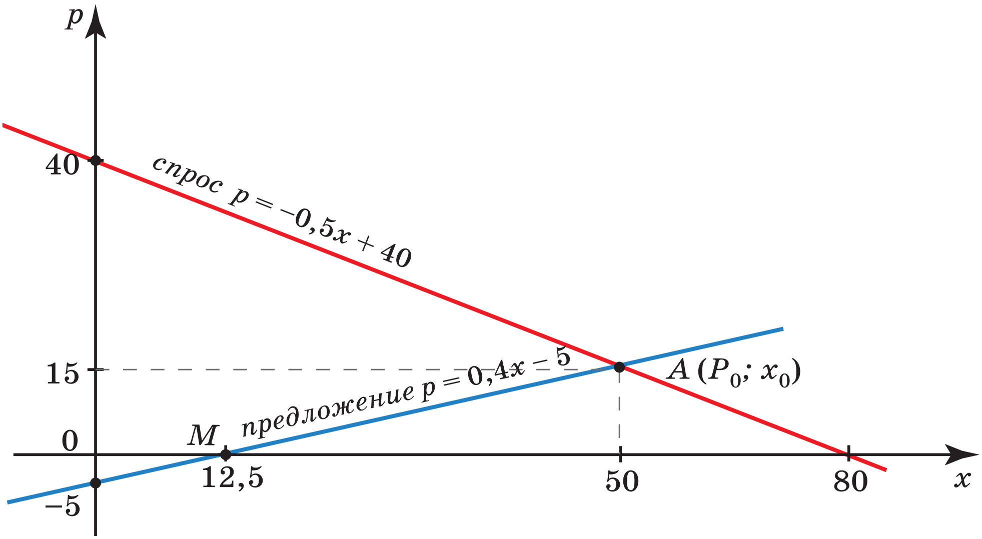


Рис. 23

Составим систему и решим её:

$$\begin{cases} p = -0{,}5x + 40 \\ p = 0{,}4x - 5, \end{cases}$$

$$p_0 = 15,\ x_0 = 50,$$

где p_0 — равновесная цена, x_0 — равновесный объём. Точка пересечения линий $A(50;\ 15)$ называется точкой рыночного равновесия. Следовательно, аптекарю надо искать других поставщиков, у которых он сможет закупать это лекарство дешевле, чтобы иметь прибыль. Добавим, что если аптекарь найдёт поставщиков, которые предложат ему товар значительно дешевле, то он сможет продавать его по равновесной цене 15 р. Тогда его доход можно рассчитать по формуле

$$D = x \cdot p = 15x.$$

В эту величину входят и издержки (расходы). Чтобы получить величину чистой прибыли P, надо из величины дохода вычесть издержки.

Издержки C включают в себя постоянные (F) и переменные (V) затраты:

$$C = F + V.$$

Постоянные издержки не зависят от числа единиц реализованного (или произведённого) товара. Они включают в себя износ (амортизацию) оборудования, аренду помещения, проценты по займам и др.

Переменные издержки напрямую зависят от количества произведённого (проданного) товара. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы, затраты на закупку и транспортировку товара.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны количеству товара (продукции). Модель издержек можно записать так:

$$C(x) = ax + m,$$

где a — коэффициент пропорциональности, который показывает переменные затраты по производству (реализации) одной единицы продукции (товара); m — постоянные затраты.

Допустим, постоянные затраты аптекаря составляют 200 р. в месяц, переменные — 10 р. за единицу товара, а выручка — 15 р. за единицу товара (для простоты рассуждений мы говорим об одном наименовании товара).

$F = 200$; $V = 10x$;

$C = 10x + 200$;

$P = D - C = 15x - 10x - 200 = 5x - 200.$

При малых объёмах продаж прибыль будет отрицательна, в этом случае дело (производство, продажа, услуги) убыточно. На графике прибыли (рис. 24) точка, в которой она равна нулю, называется точкой безубыточности. Значит, чтобы окупить свои расходы, аптекарю надо продать 40 упаковок этого лекарства. Если сделать сводные расчёты по всем наименованиям прейскуранта, то легко спрогнозировать значение прибыли за месяц реализации.

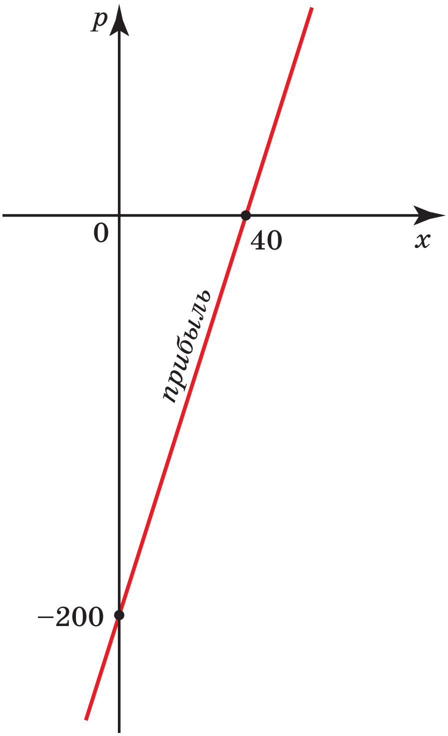


Рис. 24

Заметим, что в реальности функция издержек и функция прибыли не линейны. Первая имеет минимум (min), а вторая — максимум (max). Для их исследования можно применять производную.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Спрос на некоторый товар по цене 500 р. за штуку равен 15 единицам, а по цене 250 р. за штуку — 25 единицам. Поставщик согласен продать 10 единиц товара по цене 28 р. и 5 единиц товара по цене 16 р. Определите точку рыночного равновесия.

Ответ: (38; 80).

2. По цене 105 р. покупают 30 единиц некоторого товара, а по цене 140 р. — только 20 единиц. Поставщик продаёт 16 единиц товара по цене 120 р. и 12 единиц по цене 64 р. Определите точку рыночного равновесия и постройте графики.

Ответ: (18; 47,2).

3. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 18 тыс. р. в месяц, а переменные — 60 р. за единицу продукции. Продукция продаётся по цене 150 р. за единицу. Составьте функцию прибыли. Определите:
а) точку безубыточности;
б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила не менее 9 тыс. р. в месяц.

Ответ: функция прибыли $f = 90x - 18\ 000$; а) точка безубыточности $x = 200$; б) более 300 единиц продукции.

4. Функция издержек пошива платьев для девочек имеет вид $C(x) = 70x + 1680$, где x — количество платьев. Цена одного платья 350 р. Определите точку безубыточности. Постройте графики.

Ответ: $x = 6$.

5. Фабрика продаёт одну единицу продукции по цене 3,8 у. е. Постоянные издержки составляют 100 р. в день, а переменные — 2,8 у. е. за единицу продукции. Если фабрика купит новый станок, то постоянные издержки возрастут до 56 у. е. в день, а переменные снизятся до 1,6 у. е. за единицу продукции. Выгодно ли это?

Ответ: да.

6. Определите точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения:

а) $p = -0{,}5x + 6{,}5,$ $\quad p = 3x - 4;$

б) $p = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3},$ $\quad p = \frac{5}{3}x - \frac{17}{3}.$

Ответ: а) (3; 5); б) (4; 1).

7. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = \frac{1}{3}x + 1,$$
$$p = -\frac{2}{3}x + 7.$$

а) Определите точку рыночного равновесия.
б) Был введён налог t, равный 3% на единицу продукции. Определите новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.
в) Налог был удвоен. Вычислите доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог?
г) Правительство предоставило субсидию, равную 10% на единицу продукции. Определите новую точку рыночного равновесия.

Указание:

б) Если введён налог $t = 3$, то система уравнений имеет вид

$p_п = \frac{1}{3}x + 1$ — предложение;

$p_с = -\frac{2}{3}x + 7$ — спрос;

$p_t = p_п + 3.$

г) Если назначена субсидия $S = 10\%$, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$\begin{cases} p_п = x + 1000 \\ p_с = -2x + 2500 \\ p_t = p_п - 10. \end{cases}$$

8. Постоянные издержки при производстве наручных часов составляют 12 000 р. в месяц, а переменные — 1000 р. за одни часы. Цена часов 4000 р. Запишите функции дохода и издержек. Постройте графики. Определите точку безубыточности.

Ответ: $y = 4000x$; $y = 1000x + 12\,000$; $x = 4$.

9. Мебельная фабрика продаёт каждый стол по цене 2 тыс. р. Функция издержек линейная. Издержки составляют 48 тыс. р. за 10 столов и 45 тыс. р. за 5 столов. Составьте функцию дохода и функцию издержек. Определите точку безубыточности.

Ответ: $y = 2000x$; $y = 600x + 42\,000$; $x = 30$.

10. Обувная фабрика продаёт туфли по цене 850 р. за пару. Издержки составляют 4000 р. за 15 пар туфель и 5200 р. за 21 пару.
а) Определите точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

Ответ: а) начиная со второй пары все расходы покрываются; б) надо выпустить 6 пар туфель, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные расходы.

11. Книги продаются по цене 300 р. каждая. Постоянные издержки составляют 16 000 р. в месяц, а переменные — 200 р. за книгу.
а) Определите точку безубыточности, постройте график.
б) Сколько книг следует выпустить и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

Ответ: а) точка безубыточности $x = 160$; б) надо выпустить 232 книги.

12. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = x^2 - 11x + 100$. Цена одной единицы равна 18. Определите точку безубыточности.
Указание:

Если фирма сталкивается с полупостоянными затратами, точек безубыточности может быть несколько.
Трудности в проведении анализа безубыточности могут быть связаны со следующими причинами:
- при высоком уровне предложения, возможно, придётся снизить цену за единицу продукции. Следовательно, появится новая точка безубыточности, лежащая правее;
- крупным покупателям, вероятно, будет предоставлено право на оптовые скидки. Точка безубыточности снова сдвигается вправо;
- если величина спроса превышает предложение, то, возможно, целесообразно увеличить цену. Это сдвинет точку безубыточности влево.

13. Некто взял кредит для ремонта квартиры под 10% годовых в одном банке и под 12% годовых в другом банке. Общая сумма займа составляет 800 тыс. р., а сумма выплат по процентам — 70 тыс. р. Сколько было взято в кредит в каждом банке?

Ответ: в одном банке взято 300 тыс. р., а в другом — 500 тыс. р.

Предельные величины

Ещё одно математическое понятие может помочь нашему аптекарю разобраться в ситуации. Это производная. Производные применяются в экономике для получения так называемых предельных величин: предельных издержек, предельной выручки, предельной прибыли и т. п. Вспомним, что функция спроса на одно из лекарственных средств в аптеке имела вид $p = -0{,}5x + 40$, где x — количество проданного товара. Тогда доход аптекаря с этих продаж можно выразить следующим образом:

$$D = x \cdot p = x(-0{,}5x + 40).$$

Издержки имели вид $C = 10x + 200$. Тогда прибыль выразится функцией

$$P = x(-0{,}5x + 40) - (10x + 200) = -0{,}5x^2 + 30x - 200.$$

Функция $P(x)$ квадратичная. Её графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. С помощью производной функции легко вычислить максимум, который в нашем случае является предельной прибылью:

$$P' = -x + 30;$$
$$-x + 30 = 0;$$
$$x = 30.$$

Рассчитаем цену товара, при которой можно получить максимальную прибыль:

$$P = -0{,}5 \cdot 30 + 40 = 25.$$

Итак, при цене 25 р. за штуку аптекарь получит максимальную прибыль при минимальных расходах от продажи данного товара.

Теперь остаётся только подсчитать значение максимальной прибыли:

$$P(30) = -0{,}5 \cdot 30^2 + 30 \cdot 30 - 200 = 250.$$

Рассчитаем функцию затрат, подставив в функцию издержек функцию предложения:

$$C = F + V = px + F = (0{,}4x - 5) \cdot x + 200 = 0{,}4x^2 - 5x + 200.$$

Как видно, получилась функция квадратичная, графиком является парабола, но уже с ветвями вверх. Определим её точку минимума и значение в точке минимума:

$$C' = 0{,}8x - 5;$$
$$0{,}8x - 5 = 0;$$
$$x = 6{,}25;$$
$$C(6{,}25) = 0{,}4 \cdot 6{,}25^2 - 5 \cdot 6{,}25 + 200 = 184{,}375.$$

Производная функции издержек означает **предельные издержки**. Найдём значение предельных издержек при $x = 30$:

$$C'(30) = 0{,}8 \cdot 30 - 5 = 19.$$

Это означает следующее: если продано 30 штук упаковок данного лекарства, то дополнительные издержки по продаже 31 упаковки приблизительно равны 19 р.

Вычисление минимального значения затрат позволяет нашему аптекарю управлять своими финансами и держать в запасе «несгораемую» сумму. Знание максимального значения прибыли даст ему возможность планировать своё продвижение, распределяя средства на развитие предприятия и на личные расходы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть спрос x на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$x = \frac{40\,000}{p^2} - 1, \quad x > 0.$$

Вычислите точно и приближённо изменение спроса, если цена вырастет:

а) с 50 до 51; б) со 100 до 101.

Ответ: а) точное значение равно $-1584{,}314...$, а приближённое равно -1600. Это означает, что при увеличении цены на одну денежную единицу спрос падает приблизительно на 1600 единиц продукции; б) точное значение $-0{,}078...$, приближённое значение $-0{,}08$.

2. Известны функции соответственно спроса и предложения на некоторый товар на конкурентном рынке:

$$p = 4x + 150;$$
$$p = -x + 2000,$$

где x — число единиц товара.

Средние издержки производства одной единицы товара определяются следующей функцией:

$$\overline{C}(x) = \frac{16\,000}{x} + 500 + 10x.$$

Определите максимальное значение прибыли.

Ответ: 200.

3. Функция издержек производства некоторой продукции имеет следующий вид:

а) $C(x) = 42\,849 + 102x + 9x^2$;

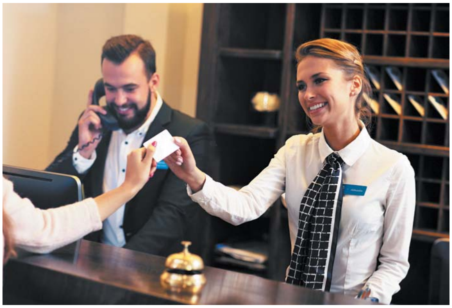
б) $C(x) = 19\,683 + 201x + 3x^2$,

где x — число единиц произведённой продукции.

Запишите функцию предельных издержек, средние издержки производства x единиц продукции и скорость изменения средних издержек (см. задание 2). При каком уровне производства скорость изменения средних издержек равна нулю?

Ответ: а) при $x = 69$; б) при $x = 81$.

4. В гостинице 60 номеров. При цене 1920 р. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 1780 р. за номер, то занято 55 номеров. Рассчитайте максимальное значение выручки, если функция спроса линейная. При какой цене достигается это значение?



Ответ: максимальный доход при цене 1640 р. за номер, максимальная выручка 98 400 р.

5. Издержки производства некоторой продукции определяются функцией $0{,}2x^2 + 40x$, где x — число единиц продукции, произведённой за месяц. Эта продукция продаётся по цене 240 р. за изделие. Сколько изделий нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальной?

Ответ: 500.

6. Производитель мониторов продаёт 100 мониторов в неделю по цене 28 000 р. за каждый. Если цена повышается до 29 000 р., то объём продаж снижается до 80 мониторов. Постоянные издержки производства мониторов составляют 150 000 р. в неделю, а переменные издержки — 8000 р. за один монитор. Полагая линейной функцию спроса, определите функцию прибыли. Рассчитайте, какой будет максимальная прибыль и при какой цене она достигается.

Ответ: прибыль равна 2 730 000 р. при цене 20 000 р.

7. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 2150 + 310x + 0{,}61x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 36 денежных единиц. Определите функцию прибыли $P(x)$ и функцию предельной прибыли $P'(x)$. Объясните экономический смысл величины $P'(16)$. Вычислите и объясните смысл величины $P(17) - P(16)$.

Указание: если разность положительна, то прибыль — возрастающая функция.

8. Месячное производство $Q(x)$ некоторого продукта зависит от инвестиций следующим образом:

$$Q(x) = 1500x^{\frac{3}{2}},$$

где x — инвестированный капитал в миллионах рублей.

Вычислите точно и приближённо прирост производства, вызванный дополнительным вложением 1 млн р., если первоначальные инвестиции составляли 200 млн р.

Указание: вычислите значение производной $Q(x)$ и разность значений функции $Q(200)$ и $Q(201)$. Сравните полученные значения.

9. Фотограф заметил, что при цене 1110 р. за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. При повышении цены до 1120 р. число клиентов снижается до 40. Соотношение между спросом и ценой считать линейным. При каком количестве наборов выручка достигает своего максимального значения?

Ответ: 600 штук.

10. Количество произведённой за день продукции $Q(x)$ зависит от числа рабочих в сборочном цехе следующим образом:

$$Q(x) = 7200x + 9x^2,$$

где x — число рабочих. В сборочном цехе работает 100 человек.

а) Оцените изменение количества произведённой за неделю продукции, вызванное добавлением одного рабочего.
б) Рассчитайте точное значение прироста выработки за неделю, вызванного добавлением одного рабочего.

11. Кафе-бистро рассчитано не более чем на 100 посетителей. При цене 120 р. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 р. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 р. в день, а переменные — 40 р. за обед. Определите функцию прибыли, предполагая зависимость между числом посетителей и ценой обеда линейной. Рассчитайте максимальное значение прибыли.

12. Цена за некоторый товар составляет 8450 р. Издержки производства этого товара равны $725x + x^2$, где x — число единиц произведённого товара. Рассчитайте максимальное значение прибыли.

Ответ: 3862,5 р.

13. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 500 + 16x + x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 6 денежных единиц. Определите функцию предельной прибыли и её значение при реализации 10 единиц товара. Объясните экономический смысл значения $P'(80)$. Вычислите и объясните смысл величины $P(6) - P(5)$.

Управление запасами

Для бесперебойного производства, продажи продукции промышленные и торговые предприятия делают запасы сырья, заготовок. Хранится до дня реализации и готовая продукция. Запасов не должно быть слишком много или слишком мало. В первом случае увеличатся затраты на хранение, во втором случае возникнет дефицит нужного товара или сырья. К тому же частое пополнение товара на складе увеличит издержки.

Правильное решение задачи управления запасами позволит избежать первого и второго случаев. Для этого аналитик сначала разрабатывает модель. Как это делается, вы уже видели в примере с аптекой.

Напомним, что прибыль напрямую зависит от доходов (цена, умноженная на количество) и расходов (издержки на производство, закупку и хранение). Но любой экономист скажет вам, что повышение цены не является лучшей мерой максимализации прибыли, по крайней мере для продукции широкого потребления. Слишком дорогой товар просто перестанут покупать! Следовательно, необходимо оптимизировать расходы. Для простоты рассуждения будет рассматриваться лишь один вид товара.

Пример 1. Вы управляете оптовым складом. Товар завозится на склад партиями. Расходуется товар со склада с постоянной скоростью. Спрос на товар стабилен и равен 1000 единицам в год.

Издержки укомплектования одной партии составляют 245 у. е. Издержки хранения — 1 у. е. за единицу товара. Закупочная цена товара 7 у. е. за штуку.

Вам необходимо организовать поставку товара (рассчитать количество товара в партии, количество партий) так, чтобы расходы были минимальны.

Решение:

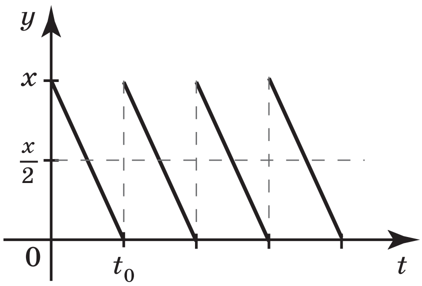


Рис. 25

Пусть товар завозится на склад партиями по x штук в одной партии. Функция наполняемости склада $y(t)$ зависит от времени (рис. 25), y — число единиц товара на складе, $\frac{x}{2}$ — средняя наполняемость склада, t_0 — время использования (говорят, «жизни») одной партии.

Составим функцию издержек так, чтобы она зависела от объёма партии x.

$\frac{1000}{x}$ — необходимое количество партий;

$\frac{1000}{x} \cdot 245$ — расходы на формирование необходимого количества партий;

$1000 \cdot 7$ у. е. — расходы на закупку товара;

$\frac{x}{2} \cdot 1$ — расходы на хранение среднего объёма товара на складе.

Функция издержек примет вид $C(x) = \frac{1000}{x} \cdot 245 + 7000 + \frac{x}{2}$; $C(x) = \frac{245\,000}{x} + 7000 + \frac{x}{2}$.

Находим минимальное значение с помощью производной:

$$C'(x) = -\frac{245\,000}{x^2} + \frac{1}{2};$$

$$C'(x) = 0;$$

$$-\frac{245\,000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0;$$

$$x = 700.$$

Убедимся, что это минимум:

$$C''(x) = \frac{490\,000}{x^3};$$

$$C''(700) > 0.$$

Следовательно, при $x = 700$ функция издержек минимальна. Партия должна состоять из 700 единиц товара.

Теперь выясним, через какое количество времени закончится 1-я партия и сколько товара нужно будет снова закупать.

$1000 : 365 = 2{,}74$ штуки продаётся за 1 день;

$700 : 2{,}74 = 255{,}47$ дня будет продаваться одна партия;

$255{,}47 : 30 \approx 8{,}5$ месяца потребуется на реализацию одной партии. К этому времени надо обновить поставку.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции за год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 р., а издержки производства одной единицы продукции — 13 р. Хранение обходится в 3 р. за единицу товара в год. Вычислите число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

   Ответ: 12 000 штук.

2. Компания должна произвести 96 тыс. единиц продукции за год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 1500 р., а издержки производства одной единицы продукции — 20 р. Хранение обходится в 0,5 р. за единицу товара в год. Вычислите число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

   Ответ: 6000 штук.

3. Компания нашла покупателя, желающего приобретать у неё 20 тыс. единиц некоторого товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 130 р. Производство одной единицы товара обходится в 23 р., а издержки хранения составляют 1,3 р. за единицу товара в год. Вычислите число единиц товара в партии, при котором совокупность издержек (производства и хранения) будет минимальна.

   Ответ: 2000 штук.

4.2 Графы

Понятие графа

В этом параграфе много интересного и занимательного. Материал, изложенный ниже, напоминает задачи из книг «Математическая шкатулка», «Занимательная математика» и др. Тем не менее в этих задачах заложено решение современных проблем интернет-коммуникации, сетевого обслуживания, компьютерного программирования и др.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Задача о кругосветном путешествии

В 1859 г. Уильям Роуэн Гамильтон придумал известную и сейчас задачу «Кругосветное путешествие». Задача заключалась в нахождении наиболее выгодного пути при посещении столиц разных стран по одному разу с учётом возврата в исходную точку. Эта задача ещё называется «задачей коммивояжёра».

Имеется *N* городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжёр должен посетить все эти *N* городов по одному разу и вернуться в тот город, с которого начал путешествие.

Требуется определить такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Указание:

1) Для математика-аналитика эта задача заключается в отыскании кратчайшего гамильтонова цикла в полном графе (рис. 26).

2) Надо: а) вычислить все *N* возможных перестановок вершин полного графа; б) подсчитать для каждой перестановки длину маршрута; в) выбрать из этих длин наименьшую.

Этот способ нерациональный и громоздкий. Но для задачи коммивояжёра не найден пока более эффективный алгоритм решения.

От этой задачи произошло название «гамильтонов цикл».

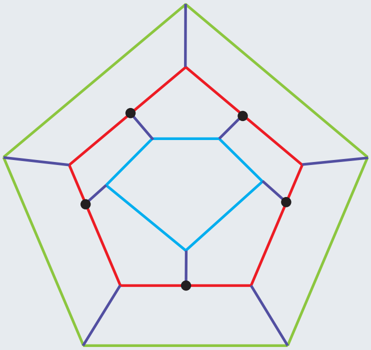


Рис. 26

Само название «граф» подразумевает наличие графического изображения, состоящего из точек и отрезков.

Графом называют совокупность двух множеств: множества точек (вершин) и множества отрезков (рёбер) с концами во множестве вершин.

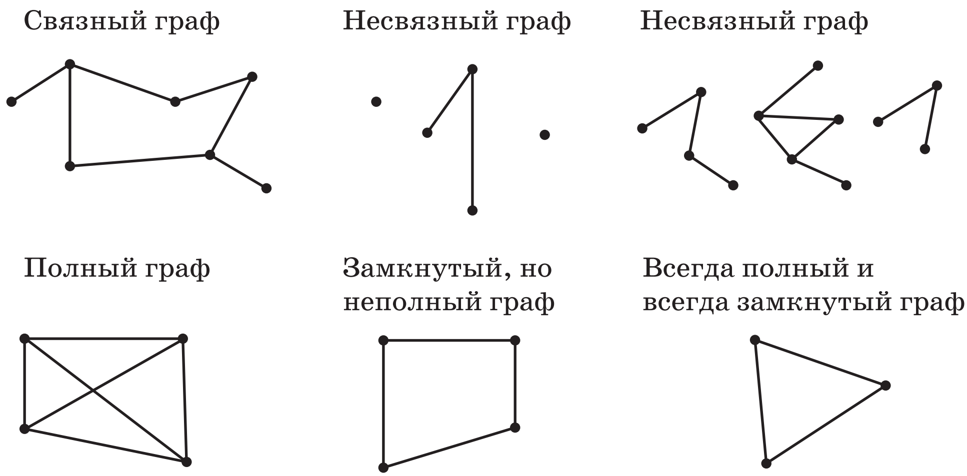


Рис. 27

Рассмотрите графы на рисунке 27 и скажите, чем они схожи и чем различаются.

Последовательность неповторяющихся рёбер, ведущая от некоторой вершины к другой вершине, называется п у т ь или м а р ш р у т.

Граф называется с в я з н ы м, если каждая его вершина соединена ребром с другой вершиной.

Граф называется п о л н ы м, если все его вершины соединены попарно друг с другом одним ребром (т. е. каждая вершина соединена с каждой).

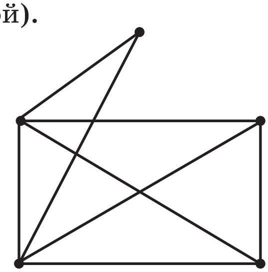


Рис. 28

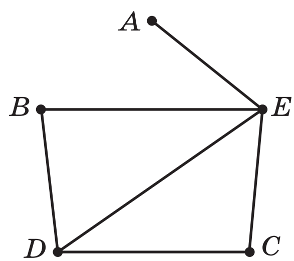


Рис. 29

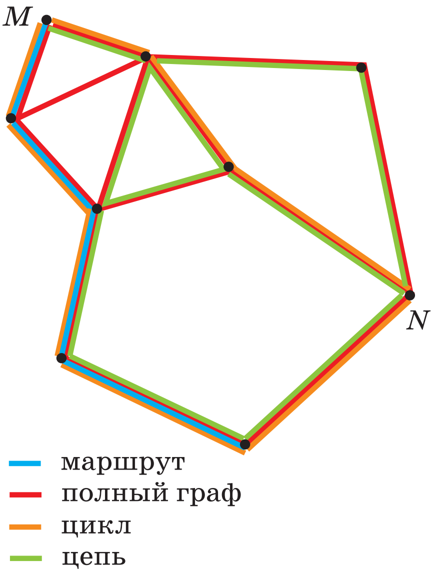


Рис. 30

Граф называется **неполным**, если в графе есть вершины, которые соединены не со всеми другими вершинами (рис. 28).

Традиционно вершины графа обозначают большими латинскими буквами, а его рёбра — парами этих букв (как отрезки).

Цикл — это цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают (рис. 29).

Цепь — это маршрут, в котором вершины могут повторяться более одного раза, а ребро — не более одного раза (рис. 30).

Граф может быть и бесконечным: например, прямоугольная сетка, подобно листу тетради на неограниченном пространстве.

Число рёбер, проведённое в выбранную вершину, натуральное и может быть либо чётным ($2k$), либо нечётным ($2k + 1$).

Это число называют **степенью** (или **порядком**) выбранной вершины. А вершину в этом случае называют чётной (или нечётной).

Пример сравнения двух графов Γ_1 и Γ_2 изображён на рисунке 31, *а*, *б*.

Составим таблицу сравнения графов.

Граф	Число вершин	Число рёбер	Число рёбер, выходящих из вершины
Γ_1	6	9	3
Γ_2	6	9	3

Если раскрашивать разными цветами (красный, зелёный, синий) рёбра, выходящие из каждой вершины графа Γ_1 и графа Γ_2, то «раскраска» у второго графа Γ_2 не получится. Причина состоит в том, что нарушены соответствия (соединения вершин) в графе Γ_2 (рис. 31).

Если поменять соединения AB на соединения AF и аналогично соединения BC на соединения FC, мы получим в точности одинаковые графы.

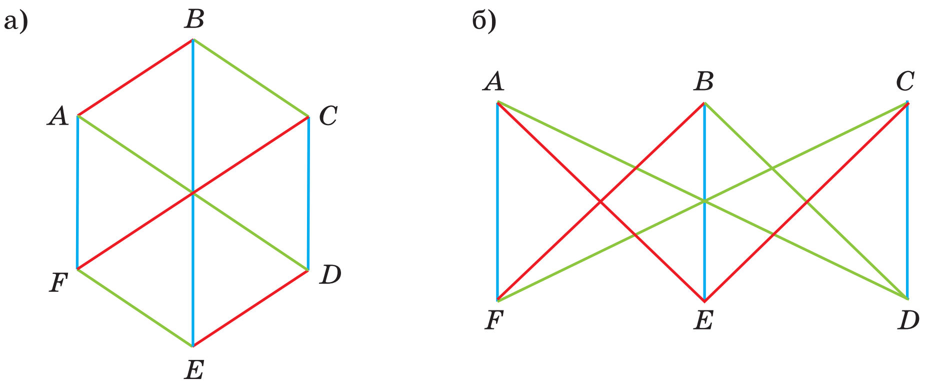


Рис. 31

А следовательно, математические модели, которые описываются этими графами, имеют тоже одинаковые свойства.

Важный класс графов составляют так называемые деревья. *Деревом* называется связный граф, который не имеет циклов (рис. 32).

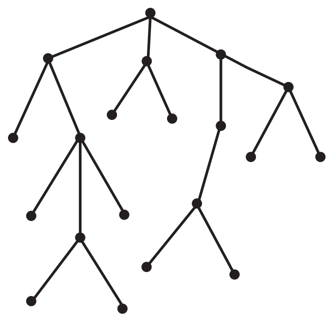


Рис. 32

Число вершин B дерева и число его рёбер P различаются на единицу:

$$B = P + 1.$$

Пример 2. Есть старинная школьная задача-игра, которую решали и 200 лет назад студенты на своих уроках-лекциях.

Надо обвести, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды, фигуру, похожую на граф.

Приведём пример: нарисуем граф, похожий на открытый конверт (рис. 33).

Пронумеруем вершины и проверим их степень.

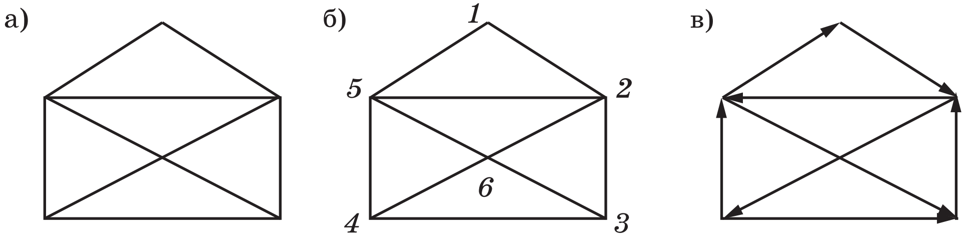


Рис. 33

Вершины 1, 2, 5 и 6 являются чётными, а вершины 4 и 3 — нечётными. Доказано, что если нечётных вершин две, то фигуру можно построить одним росчерком. Например, так: начать построение линии в вершине 4 и закончить в вершине 3.

Возможный маршрут 4 — 5 — 1 — 2 — 5 — 3 — 2 — 4 — 3.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Математик, член Петербургской академии наук Леонард Эйлер в письме к итальянскому математику и инженеру Джованни Джакобо Мариони написал:

«Мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кёнигсберге и окружённом рекой, через которую перекинуто 7 мостов. Спрашивается, может кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто ещё до сих пор не смог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. После долгих размышлений я нашёл лёгкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, при помощи которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершён такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может».

Из письма Л. Эйлера от 13 марта 1736 г.

Вот это правило:

В любом конечном связном графе, все вершины которого чётны, существует цикл, в котором каждое ребро графа участвует ровно один раз.

Такой цикл теперь называют *эйлеровым циклом*, а граф, все вершины которого чётны (и, значит, существует эйлеров цикл), — *эйлеровым графом*.

Граф не является эйлеровым, если все его вершины нечётны.

Эйлер доказал следующее:

1. Число нечётных вершин графа должно быть чётно. Не может существовать граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.

2. Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.

3. Если ровно две вершины графа нечётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом нужно на-

чинать с одной из нечётных вершин и завершить его в другой нечётной вершине.

4. Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Задача Каземиша Куратовского (1896—1980), польского математика. Имеется три дома и три колодца (рис. 34).

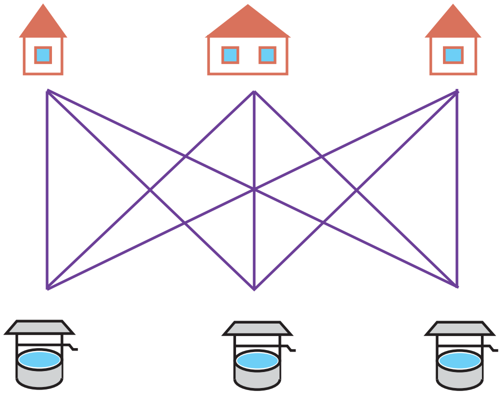


Рис. 34

Нужно проложить от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача имеет отрицательный ответ: нельзя проложить непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу.

Ученик К. Куратовского Станислав Мартин Улам открыл метод Монте-Карло [6], название которого происходит от района княжества Монако. Этот метод широко применяется в экономике, оптимизации, теории управления.

Игра «Четыре краски». Любую карту на плоскости или на сфере (на глобусе) можно раскрасить не более чем четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом. Эта задача-проблема была решена только с помощью компьютера.

В последней четверти XX столетия математики создали специальную компьютерную модель, чтобы доказать возможность раскраски. Первоначально такое доказательство не было принято всем мировым математическим сообществом. В начале XXI в. снова было проведено доказательство с помощью компьютера.

Можно раскрасить карту двумя цветами, как это показано на рисунке 35.

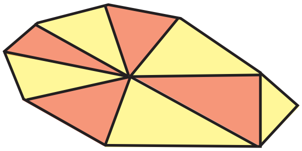


Рис. 35

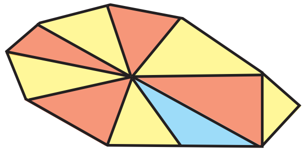


Рис. 36

Если провести ещё одну линию, то раскрасить карту двумя цветами уже нельзя (рис. 36). Нужна третья краска!

Правила игры «Четыре краски»:

Играют на листе бумаги два игрока. В их распоряжении 4 карандаша разного цвета (четыре краски).

Шаг 1. 1-й игрок рисует маленькую страну.

Шаг 2. 2-й игрок закрашивает её любым цветом и рисует по соседству следующую маленькую страну.

Шаг 3. 1-й игрок закрашивает страну, нарисованную 2-м игроком, и добавляет по соседству новую следующую страну.

И так далее: каждый игрок раскрашивает страну соперника и добавляет свою. При этом страны, имеющие общую границу, должны быть раскрашены в разные цвета. Проигрывает тот, кто, делая свой ход, вынужден будет брать для раскраски пятую краску.

Примеры раскрасок:

а) тремя красками (рис. 37); б) четырьмя красками (рис. 38).

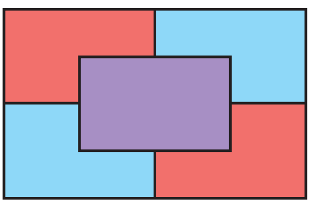


Рис. 37

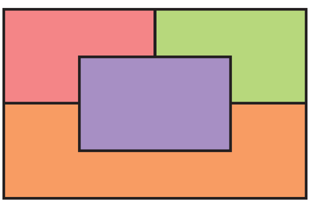


Рис. 38

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Взяв длину спички за единицу длины, сложите на плоскости стола фигуру, которая охватывала бы площадь в три квадратные единицы.

2. Проведите прямую и отметьте на ней N точек. Сколько на прямой получилось отрезков?

3. Отрезок произвольным образом разделён на два отрезка. Определите расстояние между их серединами, если длина исходного отрезка равна 64 см.

4. Отрезок произвольным образом разделён на три отрезка так, что расстояние между серединами крайних отрезков равно 25 см. Определите длину отрезка, находящегося посередине, если исходный отрезок равен 33 см.

Ответ: 17 см.

5. Сколько диагоналей имеет шестиугольник?

Ответ: 9.

6. Сколько диагоналей имеет N-угольник?

Ответ: $\frac{N(N-3)}{2}$.

7. Сколько диагоналей имеет семиугольник?

Ответ: $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

8. Из спичек сложена фигура, состоящая из девяти равных треугольников (рис. 39). Уберите пять спичек так, чтобы осталось пять треугольников.

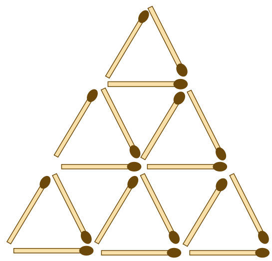


Рис. 39

9. Возьмите ту же фигуру (рис. 39) и переложите шесть спичек так, чтобы получилась фигура, состоящая из шести равных треугольников.

10. Из спичек сложена фигура (рис. 40):
а) уберите четыре спички так, чтобы осталось пять квадратов;
б) уберите восемь спичек так, чтобы осталось два квадрата;
в) уберите шесть спичек так, чтобы осталось три квадрата.

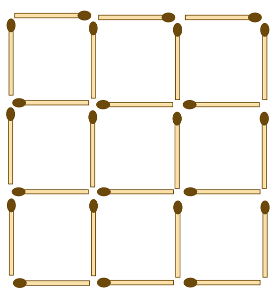


Рис. 40

11. Составьте граф спортивного соревнования. В соревновании по футболу среди юниоров соревнуются попарно три команды. Назовём вершины графа командами и проведём рёбра графа. На рёбрах поставим стрелки от победителя к побеждённым.
а) Изобразите графом результат такого спортивного соревнования.
б) Составьте граф турнира при условии, что к соревнующимся присоединилась ещё одна команда.

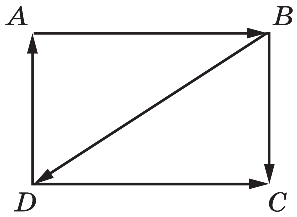


Рис. 41

12. Опишите словами турнир четырёх участников, правила которого изображены на рисунке 41. На рёбрах графа указаны стрелки от победителей к побеждённым.

13. Начертите граф, состоящий из P вершин и имеющий число рёбер, равное $\frac{P(P-1)}{2}$.

14. Начертите граф, у которого все вершины соединены друг с другом.

15. Укажите все маршруты, все цепи и все циклы следующих графов (рис. 42, 43, 44).

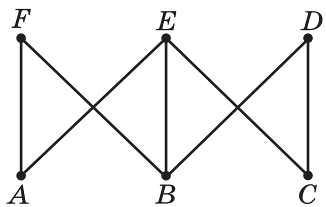


Рис. 42

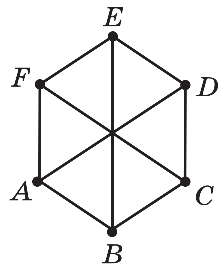


Рис. 43

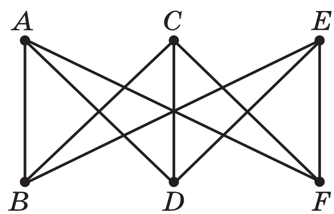


Рис. 44

16. В комбинаторике есть формула подсчёта числа сочетаний из n штук по m штук:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

С помощью этой формулы можно также вычислить количество рёбер графа кратчайшего пути.
Некоторый город N на карте занимает площадь прямоугольной формы. План города представляет собой сетку квадратных кварталов. По длине прямоугольника расположено $p = 15$ кварталов, а по ширине — $q = 10$ кварталов. Подсчитайте количество кратчайших путей проезда по кварталам города с юго-востока на северо-запад. Сделайте рисунок.

Ответ: C_{p+q}^q.

17. (*Задача на составление гамильтонова графа.*) Нужно пройти по девяти мостам, побывав на каждом только один раз (рис. 45).

Указание:

1) Начертите граф задачи, обозначьте вершины графа прописными латинскими буквами.
2) Укажите все возможные циклы графа.
3) Выберите из них только гамильтоновы циклы.
4) Запишите цикл, являющийся ответом задачи.

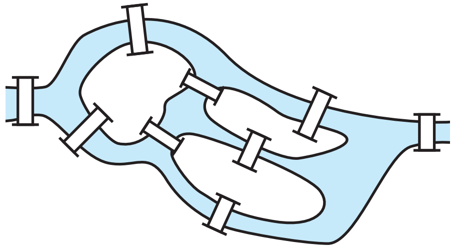


Рис. 45

18. (*Задача на составление гамильтонова графа.*) Составьте экскурсионный маршрут по двадцати двум мостам так, чтобы побывать на каждом только один раз (рис. 46).

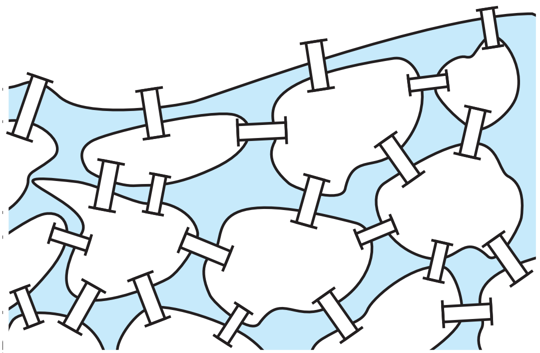


Рис. 46

Указание:

1) Начертите граф задачи.
2) Укажите все маршруты этого графа.
3) Обозначьте все циклы.
4) Запишите экскурсионный маршрут.

Задачи на основе построения дерева решений

Важный класс графов, называемый деревьями, помогает упростить задачи и составить для них эффективные алгоритмы решения. Порой для решения необходимо вспомнить, что такое вероятность и ожидаемое значение случайной величины.

Разберём типичный пример, который наглядно показывает схематичное описание проблемы принятия решения с помощью построения дерева.

Пример 3. Куда пойти учиться?

По рекомендациям родителей выпускник средней школы должен продолжить учёбу. Выбирая маршрут дальнейшего обучения, он хочет оценить возможности получения диплома по направлению «IT-технологии» или «Бизнес» в одном из двух университетов — в университете родного города N и в университете ближайшего мегаполиса. Он и его родители понимают, что вероятность успеха поступления и дальнейшего обучения зависит от выбора как учебного заведения, так и будущей специальности. Переберём все возможные исходы события.

1. Если выпускник останавливает свой выбор на столичном университете и направлении «Бизнес», то вероятность получения диплома будем считать равной 0,65.

2. Если он выбирает столичный университет и направление «IT-технологии», то вероятность успеха будем считать равной 0,8.

3. Если же выбор пал на университет родного города и направление «Бизнес», то вероятность равна 0,85.

4. Если же выпускник хочет учиться в родном городе на IT-специалиста, то будем считать вероятность равной 0,95.

5. Средний доход в месяц в течение первых пяти лет работы у молодого специалиста по бизнесу, обучавшегося в столичном вузе, 50 000 р.

6. Средний доход в месяц такого же специалиста в течение первых пяти лет работы, но обучавшегося в родном городе, 35 000 р.

7. Средний доход в месяц в течение первых пяти лет работы у получившего специальность «IT-технологии» в столичном вузе 45 000 р.

8. Средний доход в месяц в течение первых пяти лет работы молодого IT-специалиста, обучавшегося в родном городе, 37 000 р.

9. Если выпускник по каким-либо причинам не поступает в вуз, то его среднемесячный доход в течение первых пяти лет работы будет равен 15 000 р.

Теперь решение проблемы зависит от жизненных приоритетов. Для одних важен уровень дохода с первого дня трудовой деятельности. Другие согласны на низкую заработную плату ради дальнейшего профессионального развития и в конечном счёте повышения уровня дохода.

Введём обозначения и составим дерево решений, сделав предположение, что выпускник захочет высокую зарплату уже в первые пять лет работы.

f_1 — получение диплома по направлению «Бизнес» в столичном вузе;

f_2 — провал при поступлении в столичный вуз по специальности «Бизнес» или невозможность закончить обучение;

f_3 — получение диплома по направлению «IT-технологии» в столичном вузе;

f_4 — провал при поступлении или невозможность закончить обучение по направлению «IT-технологии» в столичном вузе;

f_5 — окончание вуза в родном городе по направлению «Бизнес»;

f_6 — провал при поступлении или невозможность закончить вуз в родном городе по направлению «Бизнес»;

f_7 — окончание вуза в родном городе по направлению «IT-технологии»;

f_8 — провал при поступлении или невозможность закончить вуз по направлению «IT-технологии» в родном городе;

k_1 — выбор столичного вуза;

k_2 — выбор вуза в родном городе;

k_3 — предпочтение отдано направлению «Бизнес»;

k_4 — предпочтение отдано направлению «IT-технологии».

Узлы дерева, в которых делается выбор, изобразим квадратами. Узлы дерева, которые выпускник не контролирует, изобразим кружками (рис. 47).

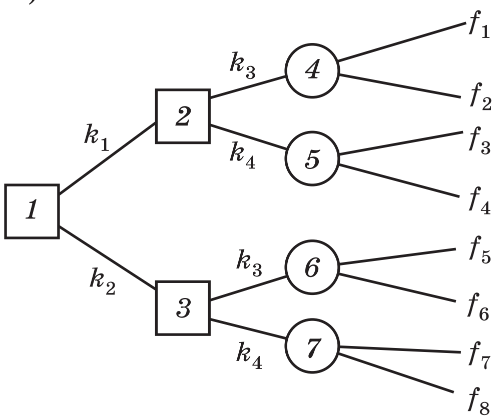


Рис. 47

Теперь рассчитаем значения этих двух типов узлов, обозначив узел буквой M_i.

$M_7 = 0{,}95 \cdot 37\,000 + 0{,}05 \cdot 15\,000 = 35\,150 + 750 = 35\,900;$

$M_6 = 0{,}85 \cdot 35\,000 + 0{,}15 \cdot 15\,000 = 29\,750 + 2250 - 32\,000;$

$M_5 = 0{,}8 \cdot 45\,000 + 0{,}2 \cdot 15\,000 = 36\,000 + 3000 = 39\,000;$

$M_4 = 0{,}65 \cdot 50\,000 + 0{,}35 \cdot 15\,000 = 32\,500 + 5250 = 37\,750.$

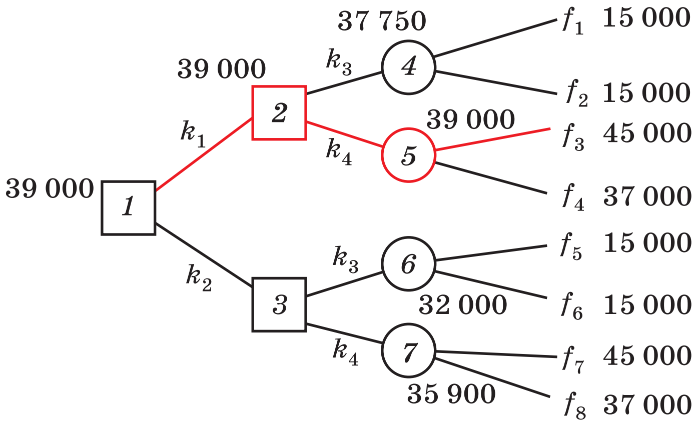


Рис. 48

Значение M_3 в третьем узле рассчитывается так: $M_7 > M_6$, значит, k_4 предпочтительнее k_3. Тогда $M_3 = M_7$ и $M_3 = 35\,900$.

Далее M_2 рассчитывается так же. Если $M_5 > M_4$, то снова k_4 предпочтительнее k_3 и $M_2 = M_5 = 39\,000$.

M_1 определяется в первом узле так: $M_2 > M_3$, значит, выбор k_1 предпочтительнее k_2. Тогда $M_1 = M_2 = 39\,000$.

Нанесём результаты расчёта на рисунок 47 (рис. 48).

Как видно из рисунка, выпускник имеет больше шансов поступить в столичный вуз по направлению «IT-технологии» и благополучно закончить его, получив диплом об образовании.

ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Попробуйте построить дерево решений для личного выбора профессии. Вероятности поступления в выбранные вузы можно рассчитать по баллам ЕГЭ (предполагаемым или реальным).

Допустим, для поступления в определённый вуз на выбранную специальность требуются результаты ЕГЭ по русскому языку и математике.

У вас 87 баллов по русскому языку и 64 балла по математике. Следовательно, будем считать, что вероятность поступления в данный вуз равна $0,87 \cdot 0,64 = 0,5568$. Среднемесячные доходы по специальностям можно найти в статистическом ежегоднике.

Кратчайший путь

Пример 4. (*Задача о соединении городов.*) Дерево решений поможет и в задаче о соединении городов. Имеется n городов — B_1,

B_2, ..., B_n. Их нужно соединить между собой сетью дорог. Стоимость сооружения дороги от одного города до другого известна и равна $f(B_i; B_j)$. Как должна располагаться сеть дорог между городами, чтобы стоимость её сооружения была минимальной? Принцип построения дерева заключается в том, что на первом шаге два города связываются наиболее дешёвым звеном. На каждом следующем шаге добавляется самое дешёвое из звеньев. Если их несколько с одинаковой стоимостью, выбирается любое. Должно чётко выполняться главное условие — отсутствие циклов.

Последний шаг сооружения дорог имеет номер $n - 1$. В таком случае стоимость сооружения сети дорог минимальна.

Пусть надо соединить четыре города. Стоимость строительства звеньев, соединяющих любые два города, известна и записана в таблицу.

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	14	10	13
B	14	0	7	12
C	10	7	0	11
D	13	12	11	0

Минимальный пучок дорог состоит из трёх звеньев ($n - 1 = 4 - 1 = 3$) (это сеть минимальной стоимости). Строится он так.

Сначала выбираем самый дешёвый участок дороги *CB*. Его цена равна 7. Затем удлиняем его на самое дешёвое из оставшихся звеньев — это участок *CA*. Его цена равна 10. И последний шаг — это звено *CD*. Его цена равна 11 (рис. 49).

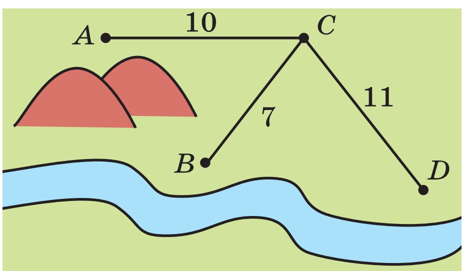


Рис. 49

В результате стоимость всей сети дорог равна 10 + 7 + 11 = 28.

З а м е ч а н и е: мы говорили о строительстве дорог с минимальной ценой.

Под этим подразумевалось строительство дорог первой очереди. Затем, когда города соединены (например, речь идёт о пересечённых местностях), строятся дороги второй очереди.

П р и м е р 5. (*Это задание похоже на игру с фишками!*) Рассмотрим сеть, заданную на рисунке 50. Необходимо определить кратчайший путь от первого до каждого узла.

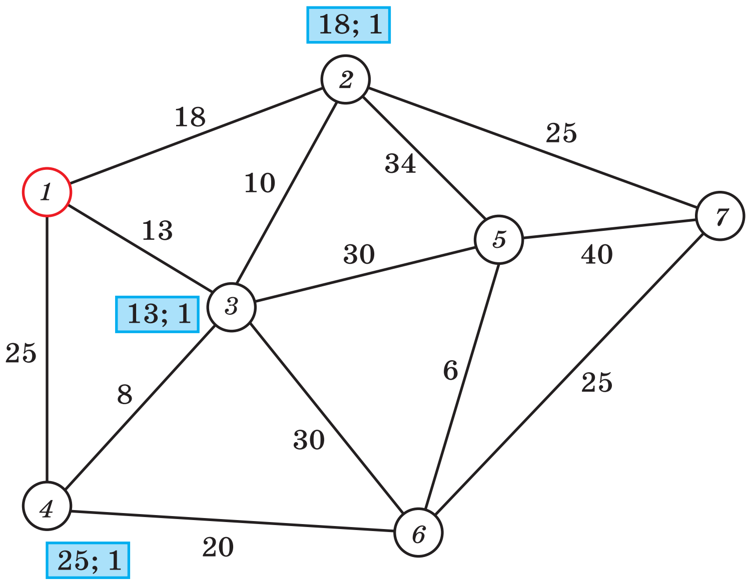
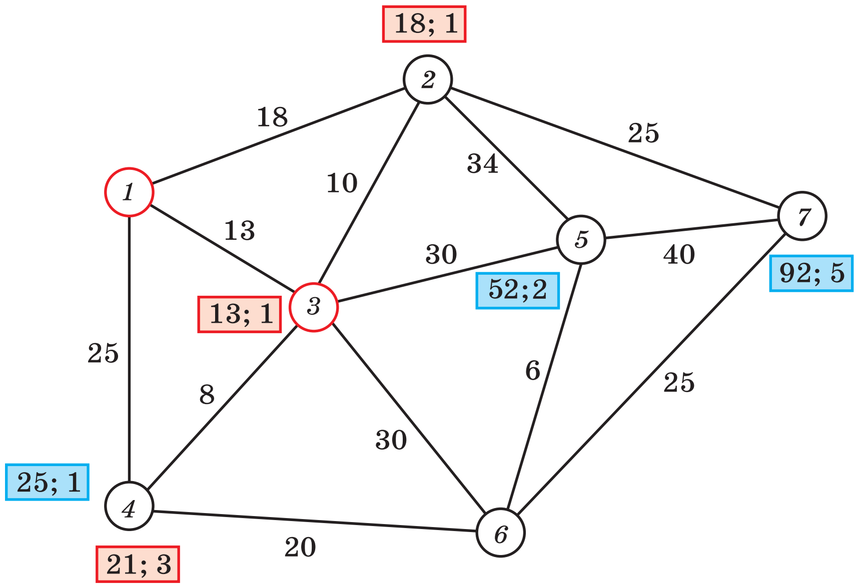


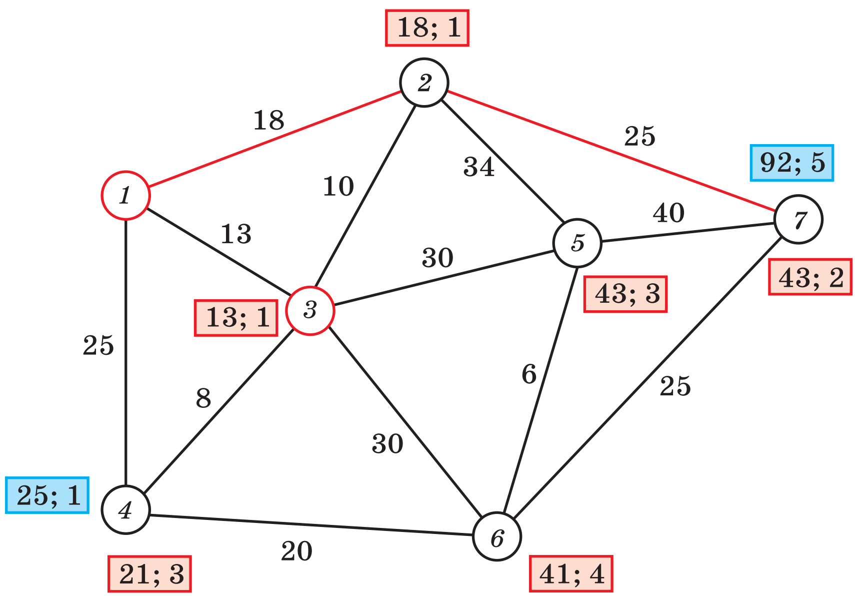
Рис. 50

Узел под номером *1* выделен. Каждый узел будем рассматривать как кратчайший путь до первого узла.

Расстояния от первого узла до второго, третьего и четвёртого соответственно равны 18, 13 и 25. Поставим метки (18; 1), (13; 1) и (25; 1). Первое число в метке обозначает расстояние, второе — номер предшествующего узла.

П е р в ы й у з е л. Ребро, связывающее первый и третий узлы, является кратчайшим маршрутом от первого узла к третьему узлу, поэтому третьему узлу ставится постоянная метка (13; 1). Третий узел и его метка выделяются красным цветом. Синим цветом выделены временные метки, красным — постоянные (рис. 51).


18; 1
2
18
10
34
25
1
13
30
5
40
7
92; 5
13; 1
3
52;2
25
8
6
25
30
25; 1
4
6
21; 3
20
Рис. 51


18; 1
2
18
25
10
34
92; 5
1
13
40
7
30
5
43; 3
43; 2
13; 1
3
25
8
6
25
30
25; 1
4
6
20
21; 3
41; 4
Рис. 52

Маршрут *1—2* короче маршрута *1—3—2*. Поэтому метку второго узла (18; 1) можно выделить красным цветом.

Маршрут *1—4* с синей меткой (25; 1) длиннее маршрута *1—3—4*. Следовательно, маршрут *1—3—4* лучше, так как является кратчайшим, и четвёртый узел выделяется меткой (21; 3) красного цвета.

Так процедуру сравнения и выбора кратчайшего пути проводят с каждым узлом. Отбирают узлы без меток.

Используя вторую компоненту метки, легко составить кратчайший путь.

Второй узел соединён с пятым и седьмым узлом одним ребром.

Пятый узел получает синюю метку (52; 2), а седьмой — (92; 5). (см. рис. 51).

Четвёртый узел. С четвёртым узлом одним ребром соединён лишь один узел, не имеющий меток, — шестой.

Из маршрутов *1—3—6* (43; 3), *1—3—4—6* (41; 4) и *1—4—6* (45; 4) маршрут *1—3—4—6* — кратчайший. Поэтому шестой узел получает метку (41; 4) красного цвета.

Третий узел. Маршрут *1—3—5* имеет длину 43 и является кратчайшим до первого узла. Пятый узел получает метку (43; 3) красного цвета. Седьмой узел, получавший метку (92; 5), меняет её на красную (43; 2) (рис. 52).

Выпишем в таблицу все красные метки.

Узел	Маршрут	Длина
2	*1–2*	18
3	*1–3*	13
4	*1–3–4*	21
5	*1–3–5*	43
6	*1–4–6*	41
7	*1–2–7*	43

В таблице указаны кратчайшие пути от первого узла до любого из оставшихся. Так, например, кратчайший путь от первого до седьмого узла — *1—2—7*.

ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Попробуйте составить список любимых мест для пеших прогулок вблизи вашего дома. Нанесите их на карту в любом браузере. Распечатайте карту с любимыми местами и начертите на ней сеть передвижения пешком. Возле рёбер сети поставьте расстояние, как показано на карте. Рассчитайте кратчайший маршрут прогулки.

Критический путь

Пример 6. (*Задача о ремонте квартиры.*) Предположим, вам необходимо рассчитать время на косметический ремонт квартиры. Для этого проект ремонта разбивается на отдельные работы, оценивается время проведения каждого вида работ и устанавливается последовательность их выполнения.

Пусть:

a_1 — снятие старых обоев — 1 день;

a_2 — размывка потолков — 2 дня;

a_3 — оштукатуривание потолков — 4 дня;

a_4 — побелка потолков — 1 день;

a_5 — наклеивание обоев — 1 день.

Составим граф (рис. 53).

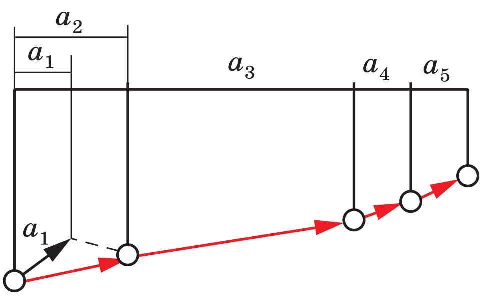


Рис. 53

Длины верхних отрезков пропорциональны продолжительности соответствующих работ, а положения левых концов каждого нижнего отрезка определяются возможностью выполнения работ.

Граф в наглядной форме показывает, как именно связаны между собой работы по проекту и в какой очерёдности их следует выполнять.

Ребро, обозначенное пунктиром, показывает, что работы a_1 и a_2 необходимо закончить в срок к началу работы a_3 и их можно выполнять одновременно. Красным выделен критический путь, который направлен из начального события в конечное и имеет наибольшую общую продолжительность:

$$2 + 4 + 1 + 1 = 8 \text{ дней.}$$

Отсюда следует, что на косметический ремонт вам потребуется 8 дней и ни днём меньше.

ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Попробуйте рассчитать время приготовления своего любимого блюда по рецепту.

Элементы теории игр в задачах

В жизни часто приходится рассматривать явления и ситуации, в которых участвуют две или более стороны. У сторон разные интересы и возможности достижения своих целей. Такие ситуации называют конфликтами. Упрощённую модель конфликта принято называть *игрой*. Специальный математический аппарат, который позволяет изучать конфликты, составляет основу *теории игр*. Заинтересованные стороны называются *игроками*. Любые возможные действия игроков в рамках заданных правил игры называются *стратегиями*. Протекание конфликта состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и получении им в сложившейся ситуации *выигрыша* из некоторого источника.

Будем рассматривать примеры матричных игр. *Матричные игры* — самые простые, но и наиболее изученные и продвинутые классы игр. Они интересны ещё и тем, что к ним могут быть сведены многие игры общего вида.

Пример 7. (*Играем и выигрываем!*) Денис и Максим одновременно, независимо друг от друга записывают на листе бумаги любое целое число.

Если сумма цифр выписанных чисел у того и у другого делится на три, то Денис получает 1 очко, а если нет, то, наоборот, Максим получает 1 очко.

У каждого из них по две стратегии:

— выбрать число, делящееся на три;

— выбрать число, не делящееся на три.

Составим таблицу, так называемую *платёжную матрицу*, этой игры, где D_1, D_2 — стратегии Дениса, а M_1, M_2 — стратегии Максима:

	D_1	D_2
M_1	1	−1
M_2	−1	1

Матрица этой игры 2×2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что выбор игроками своих стратегий однозначно определяет исход игры — выигрыш Дениса d_{ik} и выигрыш Максима m_{ik}. Они связаны равенством

$$m_{ik} = -d_{ik}.$$

Поэтому при анализе такой игры можно рассматривать выигрыш только одного игрока.

Элементами матрицы игры являются числа, описывающие выигрыш одного из игроков. В нашем примере это Максим. Выигрыш Максима соответствует положительному числу, а отрицательное число показывает его проигрыш.

Чтобы игра стала интереснее, ребята добавили в неё ещё одно правило.

Если игрок выбрал число, делящееся на три или на число, большее, чем у другого игрока, то он получает 2 очка дополнительно.

Платёжная матрица первого раунда игры сложилась так:

	D_1	D_2	D_3	D_4
M_1	1	−1	1	3
M_2	1	2	1	2
M_3	2	−1	1	1
M_4	3	1	1	2

Считая, что ребята будут играть много раз, попробуем определить оптимальные стратегии каждого игрока. Запишем минимальные выигрыши Максима в правом столбце.

M_1	1	–1	1	3	–1
M_2	1	2	1	2	1
M_3	2	–1	1	1	–1
M_4	3	1	1	2	1

Максимальный выигрыш Максима среди минимальных равен 1 (*максимин*).

Теперь записываем максимальные выигрыши Дениса.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
M_1	1	–1	1	3	–1
M_2	1	2	1	2	1
M_3	2	–1	1	1	1
M_4	3	1	1	2	1
	3	2	1	3	

Минимальный выигрыш Дениса среди его максимальных равен 1 (*минимакс*).

Итак, Максим имеет максимин, равный 1. Денис имеет минимакс, равный 1. Наилучшими стратегиями для Максима являются стратегии M_2 и M_4, при которых его минимальный выигрыш максимален. Неудивительно, что Денис остановит свой выбор на стратегии D_3, при которой максимальный выигрыш Максима минимален.

Ситуация, когда Максим выбирает стратегию M_2 или M_4, а Денис придерживается стратегии D_3, называется *равновесием* или *равновесной ситуацией*.

В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т. е. стремятся к получению максимального выигрыша.

В нашем примере с Максимом и Денисом равновесная ситуация найдена. И ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы её нарушить. *Цена игры* в данном случае равна 1. Цена игры совпадает с элементом матрицы, стоящим во второй строке и третьем столбце, и с элементом, стоящим в четвёртой строке и третьем столбце. Эти элементы называются *седловыми точками* или *точками равновесия*. Таких точек может быть несколько.

Понятно, что, пока наши игроки придерживаются стратегий $\{M_2;\ D_3\}$ и $\{M_4;\ D_3\}$, выигрыш при многократном повторении игры будет равен 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определите седловую точку (ν) или несколько седловых точек матричной игры:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ: $-4 < \nu < 3$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: $-2 < \nu < 5$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & -7 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: $-5 < \nu < 2$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Ответ: $-3 < \nu < 4$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: $-6 < \nu < 1$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: 1.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: 2.

8. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Ответ: 4.

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: 1.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $-1 < \nu < 2$.

11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $-3 < \nu < 0$.

12. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -6 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

Ответ: $-5 < \nu < -2$.

13. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ: $2 < \nu < 5$.

14. $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ответ: $5 < \nu < 8$.

15. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: 5.

ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Попробуйте составить платёжную матрицу любимой игры со своим другом и определить цену игры.

ЧТО УЗНАЛИ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 4

ЧЕМУ НАУЧИЛИСЬ, ИЗУЧИВ ГЛАВУ 4

1. Вычислять доход, прибыль, издержки и их предельные величины.
2. Строить различные виды графов.
3. Находить кратчайшие и критические пути.

ИТОГОВЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие экономико-математического моделирования. Область применения.
2. Границы познавательных возможностей экономико-математического моделирования.
3. Значение экономико-математического моделирования для экономической науки и практики.
4. Определение экономико-математического моделирования.
5. Этапы экономико-математического моделирования.
6. Классификация экономико-математических методов.
7. Классификация экономико-математических моделей.
8. Принцип оптимальности в планировании и управлении.
9. Понятие допустимого решения задачи ЛП.
10. Оптимальное решение задачи ЛП: математическое определение, экономический смысл.
11. Несовместимость системы ограничений задачи ЛП: причины, примеры, экономическая интерпретация.
12. Неограниченность целевой функции задачи ЛП: причины, примеры, экономическая интерпретация.
13. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.
14. Опорное решение задачи ЛП и способы его определения.
15. Формулировка и экономическая интерпретация транспортной задачи, решаемой на минимум стоимости перевозок.
16. Алгоритм поиска кратчайшего пути на графе.
17. Алгоритм поиска минимального срока выполнения последовательности работ.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРОЕКТОВ

1. Рассчитайте и постройте тренд числа специалистов интересующего направления в РФ или в своём городе, области.
2. Рассчитайте и постройте модель рождаемости по слоям населения (рождаемость среди городского населения, сельского населения и др.) в РФ и в своей области.
3. Рассчитайте и постройте модель заболеваемости респираторными и другими заболеваниями в своей школе среди учащихся и среди учителей.

Приложение 1. Инструкция по включению надстройки Пакета анализа MS Excel

Как это сделать:

а) Перемещаемся во вкладку **«Файл»**. Делаем щелчок по пункту **«Параметры»** (рис. П1).

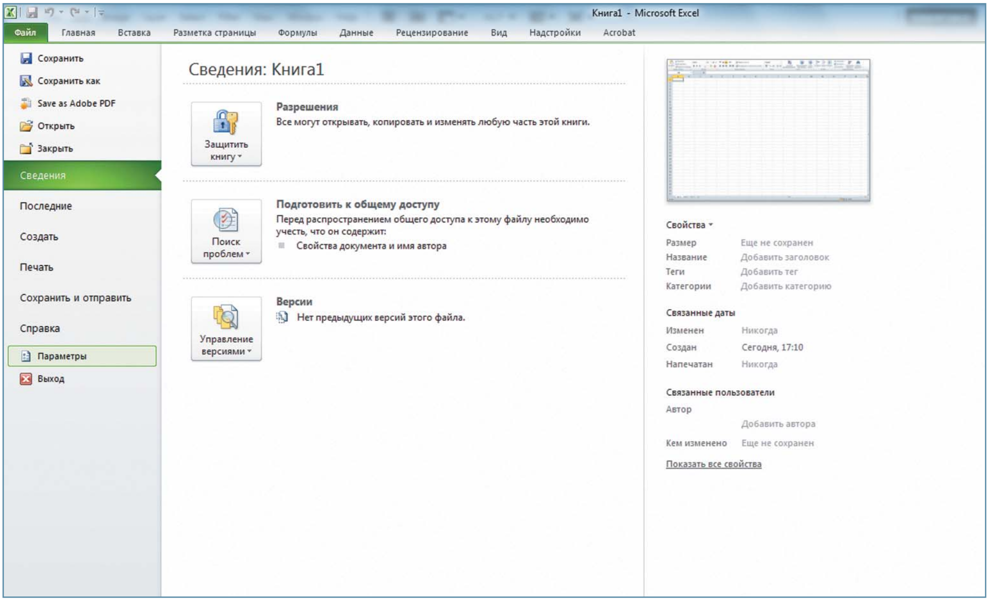


Рис. П1

б) В запустившемся окне параметров следует перейти в раздел **«Надстройки»** (рис. П2).

в) В нижней части окна в поле **«Управление»** должен быть выставлен параметр **«Надстройки Excel»**. Щёлкаем по кнопке **«Перейти»** (рис. П3).

г) На экране появляется окно надстроек. Устанавливаем галочку около пункта **«Пакет анализа»** и щёлкаем по кнопке **«ОК»** (рис. П4).

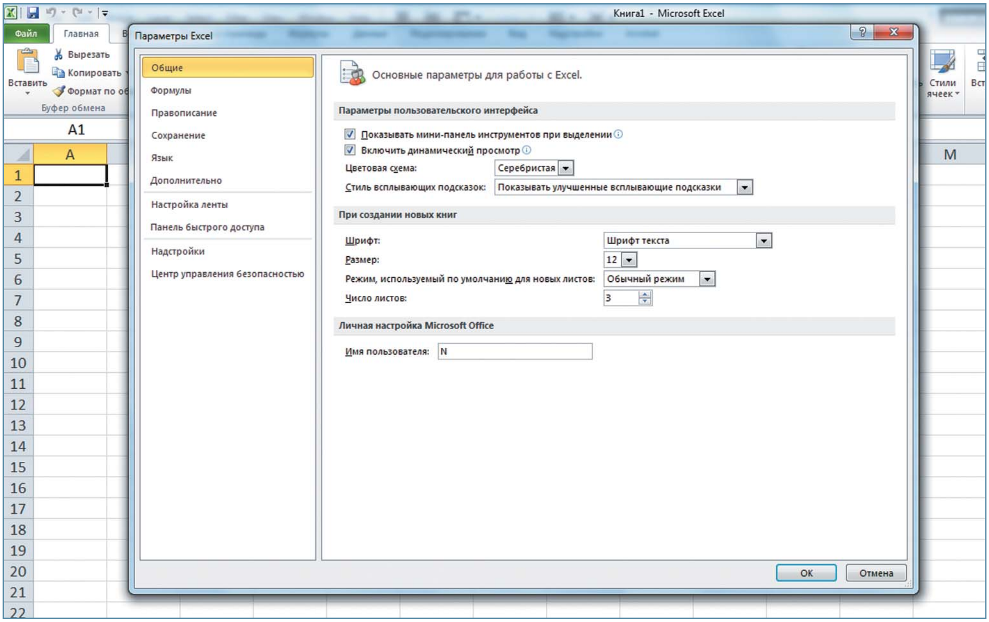

Книга1 - Microsoft Excel
Параметры Excel
Общие
Формулы
Правописание
Сохранение
Язык
Дополнительно
Настройка ленты
Панель быстрого доступа
Надстройки
Центр управления безопасностью
Основные параметры для работы с Excel.
Параметры пользовательского интерфейса
Показывать мини-панель инструментов при выделении
Включить динамический просмотр
Цветовая схема: Серебристая
Стиль всплывающих подсказок: Показывать улучшенные всплывающие подсказки
При создании новых книг
Шрифт: Шрифт текста
Размер: 12
Режим, используемый по умолчанию для новых листов: Обычный режим
Число листов: 3
Личная настройка Microsoft Office
Имя пользователя: N
ОК
Отмена

Рис. П2

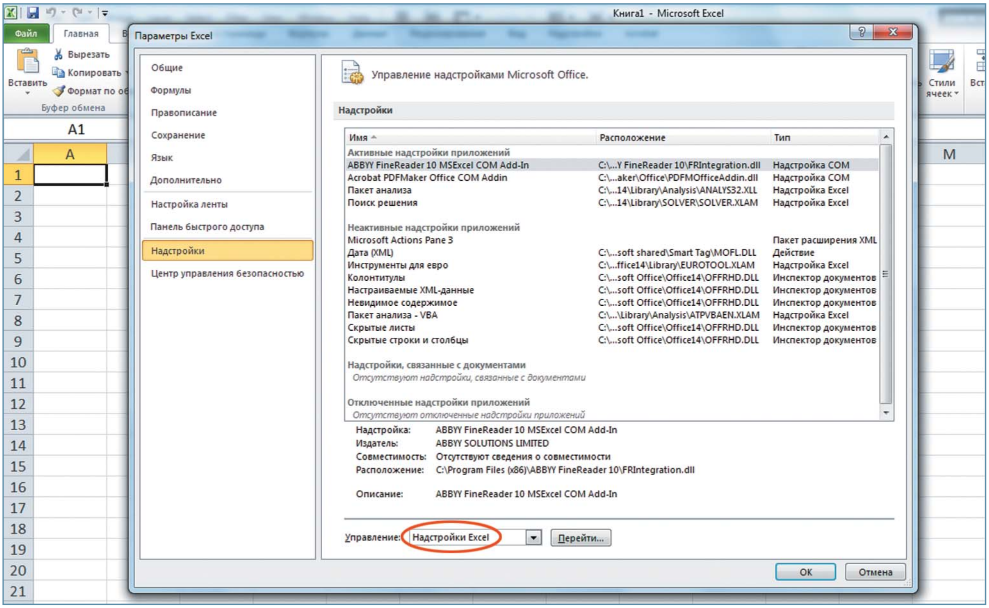

Книга1 - Microsoft Excel
Параметры Excel
Общие
Формулы
Правописание
Сохранение
Язык
Дополнительно
Настройка ленты
Панель быстрого доступа
Надстройки
Центр управления безопасностью
Управление надстройками Microsoft Office.
Надстройки
Имя
Расположение
Тип
Активные надстройки приложений
ABBYY FineReader 10 MSExcel COM Add-In
Acrobat PDFMaker Office COM Addin
Пакет анализа
Поиск решения
Неактивные надстройки приложений
Microsoft Actions Pane 3
Дата (XML)
Инструменты для евро
Колонтитулы
Настраиваемые XML-данные
Невидимое содержимое
Пакет анализа - VBA
Скрытые листы
Скрытые строки и столбцы
Надстройки, связанные с документами
Отсутствуют надстройки, связанные с документами
Отключенные надстройки приложений
Отсутствуют отключенные надстройки приложений
Надстройка: ABBYY FineReader 10 MSExcel COM Add-In
Издатель: ABBYY SOLUTIONS LIMITED
Совместимость: Отсутствуют сведения о совместимости
Расположение: C:\Program Files (x86)\ABBYY FineReader 10\FRIntegration.dll
Описание: ABBYY FineReader 10 MSExcel COM Add-In
Управление: Надстройки Excel
Перейти...
ОК
Отмена

Рис. П3

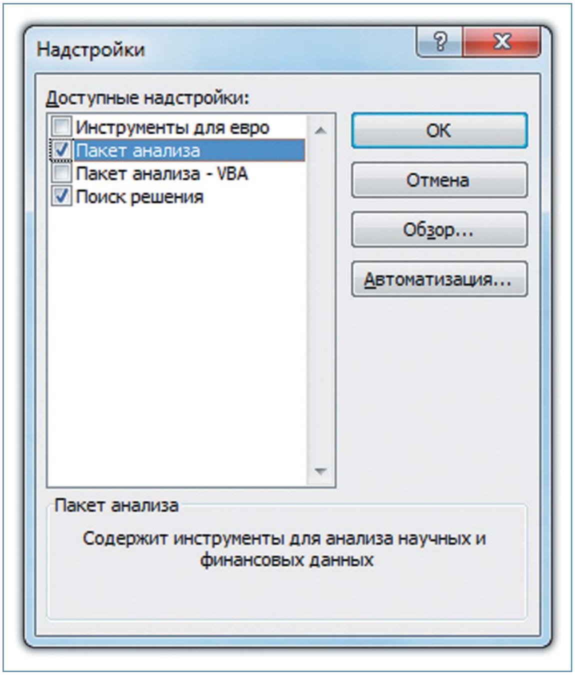


Рис. П4

д) После этого действия пакет **«Анализ данных»** активирован, и соответствующая кнопка появилась на ленте во вкладке **«Данные»**.

Приложение 2. Поурочный план

Курс рассчитан на 35 ч в год (1 ч в неделю), 70 ч в год (2 ч в неделю), 70 ч в 2 года (1 ч в неделю).

Номер урока	Номер параграфа	Тема
1	1.1	Математическое моделирование в современных профессиях и естествознании
2	1.2	Понятие математической модели. Классификация моделей. Этапы экономико-математического моделирования
3	2.1	Постановка задачи линейного программирования
4	2.2	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод
5	2.2	Методы решения задач линейного программирования. Решение задачи в MS Excel
6	2.3	Задача составления плана производства
7	2.4	Задача о рациональном питании
8	2.5	Транспортная задача
9	2.6	Задача комплексного использования сырья на примере рационального раскроя материала
10	2.7	Задача загрузки оборудования
11—13	2.8	Практикум
14		**Зачёт**
15	3.1	Понятие временного ряда. Примеры временных рядов
16	3.1	Характеристики временных рядов
17	3.1	Работа с данными в MS Excel

Продолжение

Номер урока	Номер параграфа	Тема
18	3.2	Методы анализа временных рядов. Метод скользящего среднего
19	3.2	Метод избранных точек
20	3.2	Лабораторная работа № 1. Анализ временного ряда в MS Excel. Построение тренда временного ряда
21	3.3	Лабораторная работа № 2. Построение линейной модели методом наименьших квадратов
22	3.3	Лабораторная работа № 3. Построение параболической модели методом наименьших квадратов
23	3.3	Лабораторная работа № 4. Построение гиперболической модели методом наименьших квадратов
24		**Зачёт**
25	4.1	Практикум. Предельные величины
26	4.1	Практикум. Модель спроса и предложения
27	4.1	Практикум. Модель управления запасами
28	4.1	Резервный урок
29	4.2	Понятие графа. Дерево решений. «Четыре краски»
30	4.2	Задачи на основе построения дерева решений. Кратчайший путь. Критический путь
31	4.2	Элементы теории игр в задачах. Разрешение споров
32		**Зачёт**
33		**Защита индивидуальных проектов**
34		**Защита индивидуальных проектов**
35		**Защита индивидуальных проектов**

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Лань, 2011. — 352 с. — (Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»). http://asmlocator.ru/viewtopic.php?p=338815
2. Астафьева В. В. История компьютерного моделирования: компьютерное моделирование в России // Молодой учёный. — 2016. — № 21. — С. 747—750. https://moluch.ru/archive/125/34919
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. http://bookre.org/reader?file=445072
4. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — 5-е изд., стер. — М.: КноРус, 2013. — 192 с.
5. Власов М. П. Моделирование экономических процессов: Учеб. — Ростов н/Д: Феникс, 2005. — 409 с.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. для прикладного бакалавриата — 12-е изд. — М.: Юрайт, 2014. — 479 с.
7. Далингер В. А. Методика обучения геометрии посредством решения за-дач: Учеб. пособие для бакалавриата. — М.: Юрайт, 2018. — 370 с.
8. Дубина И. Н. Основы математического моделирования социально-эконо-мических процессов: Учеб. и практикум. — М.: Юрайт, 2016. — 349 с.
9. Думная Н. Н. Экономика: Учеб. пособие. — М.: КноРус, 2016. — 220 с.
10. Замков О. О., Толстопятов А. В., Черемных Ю.А. Математические методы в экономике. — М.: Дело и Сервис, 2001.
11. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрис-Пресс, 2002. — 553 с.
12. Канторович Л. В. Математико-экономические работы. — Новосибирск: Наука, 2011. — 760 с. — (Избранные труды). http://math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/selecta.pdf
13. Количественные методы разработки и принятия решений в менеджменте. Компьютерное моделирование в Microsoft Excel. Практикум: Учеб. пособие. — М.: Ленанд, 2018. — 120 с.

14. Королёв А. В. Экономико-математические методы и моделирование: Учеб. и практикум для бакалавриата и магистратуры. — М.: Юрайт, 2018. — 280 с.
15. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике: Математические методы и модели: Учеб. для бакалавров / Под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Юрайт, 2013. — 541 с.
16. Лихтенштейн В. Е. Экономико-математическое моделирование. Менеджерам. Экономистам. Маркетологам. Исследователям. Аналитикам: Учеб. пособие. — М.: Приор, 2011. — 448 с.
17. Моисеев Н. Н. Алгоритмы развития. — М.: Наука, 1987. — 304 с. — (Серия «Академические чтения»). http://www.booksshare.net/index.php?id1=4&category=biol&author=moiseev-nn&book=1987
18. Моисеев Н. Н. Люди и кибернетика. — М.: Мол. гвардия, 1984. — 224 с. http://bookre.org/reader?file=758254
19. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979. — 224 с. http://bookre.org/reader?file=578306
20. Математическая составляющая / Ред.-сост. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин. — М.: Фонд «Математические этюды», 2015. — 151 с.
21. Методы оптимальных решений (экономико-математические методы и модели): Учеб. пособие / Под ред. С. И. Макарова. — М.: КноРус, 2019. — 240 с.
22. Моделирование систем и процессов: Учеб. / Под ред. Н. В. Волковой и В. Н. Козлова. — М.: Юрайт, 2015. — 452 с.
23. Моделирование экономических процессов: Учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М. В. Грачёвой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. — М.: Юнити-Дана, 2005. — 351 с.
24. Надеждин Е. Н., Смирнова Е. Е., Варзаков В. С. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей. — Тула: Автономная некоммерческая организация ВПО «Институт экономики и управления», 2011. — 249 с.
25. Новиков А. И. Экономико-математические методы и модели. — М.: Дашков и К, 2017. — 532 с.
26. Орлова И. В., Бич М. Г. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач в Excel. — 3-е изд. — М.: Вузовский учебник, 2018. — 192 с.

27. Орлова И. В., Половников В. А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учеб. пособие / Авт.-сост. И. В. Орлова, В. А. Половников. — М.: Вузовский учебник, 2018. — 389 с. — (Серия «Вузовский учебник»).
28. Оуэн Г. Теория игр: Учеб. пособие. — 5-е изд. — М.: ЛКИ, 2010. — 216 с. http://bookre.org/reader?file=445892&pg=3
29. Павлидис В. Д., Чкалова М. В. Практикум по экономико-математическим методам. — М.: Омега-Л, 2014. — 130 с.
30. Попов А. М., Сотников В. Н. Экономико-математические методы и модели: Учеб. для прикладного бакалавриата. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Юрайт, 2017. — 345 с. — (Серия «Бакалавр. Прикладной курс»).
31. Самарский А. А. Математическое моделирование: идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2005. — 320 с.
32. Светлов Н. М. Альбом наглядных пособий по экономико-математическому моделированию: Учеб. пособие для студентов бакалавриата по направлению «Менеджмент» / Под ред. Н. М. Светлова. — М.: РГАУ — МСХА им. К. А. Тимирязева, 2008. — 227 с. http://window.edu.ru/resource/357/62357/files/lr.pdf
33. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике. Учеб. В 3 ч. — М.: Финансы и статистика, 2008. — 464 с.
34. Трусов П. В. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие. — М.: Логос, 2016. — 440 с.
35. Федосеев В. В. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда: Учеб. пособие. — М.: Инфра-М, 2015. — 144 с. — (Серия «Вузовский учебник»).
36. Хижняк А. Н., Светлов И. Е. Основы эффективного менеджмента: Учеб. пособие. — М.: Инфра-М, 2015. — 320 с.
37. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. — 2-е изд., испр. — М.: Дело, 2002. — 440 с.
38. Экономико-математические методы в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. А. Н. Гармаш. — М.: Вузовский учебник, 2014. — 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «Профильная школа»

Генералов Геннадий Михайлович

Математическое моделирование

10—11 классы

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция физики

Заведующий редакцией *В. В. Жумаев*
Ответственный за выпуск *Н. В. Емельяненко*
Редактор *Н. В. Емельяненко*
Художник *А. Г. Вьюниковская*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная вёрстка и техническое редактирование *Н. А. Разворотневой*
Корректоры *Ю. С. Борисенко, Е. А. Воеводина*

Подписано в печать . Формат $70\times90^1/_{16}$.
Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 8,63. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Серия обеспечивает поддержку успешного профильного обучения и профессионального самоопределения старшеклассников.

Пособия серии могут использоваться как при реализации учебного плана технологического, естественно-научного, социально-экономического, гуманитарного, универсального профилей на уровне среднего общего образования.

- Разработаны научными сотрудниками вузов совместно с учителями-практиками, имеющими опыт работы в профильных классах.
- Обеспечивают мотивированное углублённое изучение отдельных разделов профильных учебных предметов, не входящих в обязательную программу.
- Знакомят старшеклассников со спецификой видов деятельности, которые будут для них ведущими с точки зрения профессиональной перспективы.
- Помогают в построении индивидуальной образовательной траектории, в решении вопроса о выборе будущей профессии.

ISBN 978-5-09-084745-2

В серии «ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА»
для старшей школы:

- Сборник примерных рабочих программ. Элективные курсы для профильной школы
- Экологическая безопасность. Школьный экологический мониторинг. Практикум
- Медицинская статистика
- Физическая химия
- Биохимия
- Биотехнология
- Основы нанотехнологий
- Ядерная физика
- Прикладная механика
- Основы системного анализа
- **Математическое моделирование**
- Индивидуальный проект
- Оказание первой помощи
- Основы практической медицины
- Основы фармакологии
- Основы компьютерной анимации
- Латинский язык для медицинских классов
- Финансовая грамотность. Цифровой мир*
- Интернет-предпринимательство*

* Можно использовать вариативно: как элективный профильный курс и во внеурочной деятельности.

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
www.prosv.ru